Катер в канале с течением

Задача 1. [МОШ 2015/16, 7 класс, задача 1] **Катер в канале с течением.** Горизонтальный канал соединяет две судоходные реки А и Б. Иногда в нём возникает слабое течение, которое может быть направлено либо в одну, либо в другую сторону. От одной реки к другой по каналу курсирует катер, скорость которого относительно воды постоянна. Капитан катера заметил, что за много лет ему никогда не удавалось совершить рейс туда и обратно быстрее, чем за $t_1 = 2$ часа, а самый неудачный рейс длился $t_2 = 3$ часа (время разворота катера и остановок не учитывается). Однажды мотор катера сломался, но из-за стечения обстоятельств рейс от А к Б и обратно всё-таки был выполнен. Какое минимальное время для этого могло понадобиться катеру?

После ремонта катер стал развивать в два раза большую скорость относительно воды. Как долго теперь может длиться рейс туда и обратно?

▲ **Решение.** **Что происходит.** Это задача на сложение скоростей: скорость катера относительно берега равна сумме его скорости относительно воды и скорости течения. Главная подсказка — рейс со сломанным мотором: катер, которого несёт только вода, смог вернуться, значит, течение за время одного рейса *сменило направление*. Раз так бывает, за много лет капитану попадались все сочетания: течение попутное в обе стороны, встречное в обе стороны, попутное в одну и встречное в другую, течения нет. Самый быстрый рейс — когда течение оба раза попутное, самый долгий — когда оба раза встречное. Эти два рейса дают скорость течения в долях скорости катера и длину канала.

Обозначения. s — длина канала; v — скорость катера относительно воды (до поломки); u — скорость течения, когда оно есть (течение слабое: $u < v$). Скорости относительно берега записываем по модулю: если течение направлено туда же, куда идёт катер, скорости складываются, если навстречу — вычитаются (рис. 1).

1. Времена рейсов до поломки. На каждом пути катер движется равномерно, время равно пути s, делённому на скорость относительно бе-

рега. Перечислим сочетания:

течение оба раза попутное: $\dfrac{s}{v+u}+\dfrac{s}{v+u}=\dfrac{2s}{v+u}$;

течения нет: $\dfrac{2s}{v}$;

туда попутное, обратно встречное: $\dfrac{s}{v+u}+\dfrac{s}{v-u}=\dfrac{2sv}{v^2-u^2}$;

оба раза встречное: $\dfrac{2s}{v-u}$.

Меньше всех первое время (в знаменателе наибольшая скорость $v+u$), больше всех — последнее: третье отличается от него множителем $v/(v+u)<1$. Если течение меняется посреди пути, время рейса лежит между крайними. Значит,

$$t_1=\frac{2s}{v+u},\qquad t_2=\frac{2s}{v-u}. \tag{1}$$

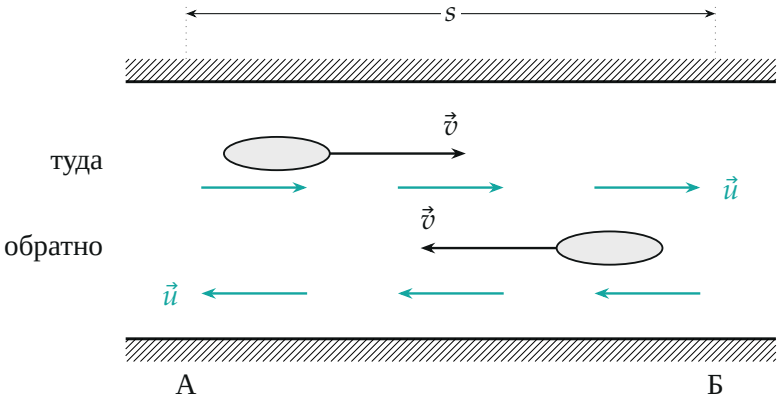


Рис. 1. Самый быстрый рейс: пока катер разворачивался у Б, течение сменило направление, и оба раза оно попутное. Скорость катера относительно берега туда и обратно равна $v+u$.

2. Связь v и u, s и t_1. Разделим второе равенство (1) на первое — длина s сократится, — а затем подставим найденное v в первое:

$$\frac{t_2}{t_1} = \frac{v+u}{v-u} = \frac{3}{2} \;\Rightarrow\; v = 5u; \qquad s = \frac{(v+u)\,t_1}{2} = 3u\,t_1. \qquad (2)$$

Пункт 1. Мотор сломан. Катер не движется относительно воды: относительно берега его скорость равна скорости течения. От А к Б его несёт течение, направленное к Б, обратно — течение, направленное к А; пока течения нет, катер стоит. Быстрее всего рейс пройдёт, если катер всё время плывёт за счёт течения: туда течение к Б, а у Б, как раз когда катер там, оно сменило направление (рис. 2). Тогда на каждый путь уходит s/u, и с учётом (2)

$$T_{\min} = \frac{s}{u} + \frac{s}{u} = \frac{2s}{u} = \frac{2\cdot 3u\,t_1}{u} = 6t_1 = 12 \text{ ч}.$$

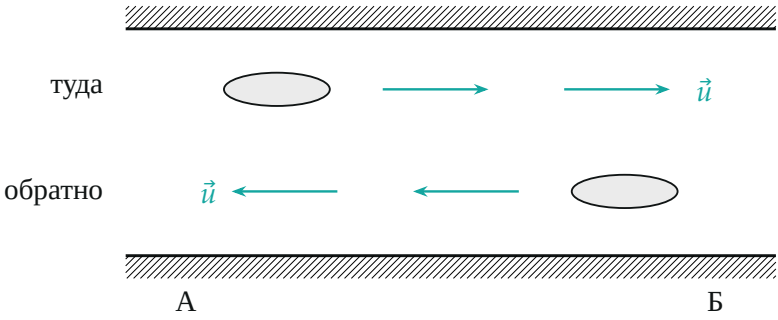


Рис. 2. Мотор сломан: катер неподвижен относительно воды, его скорость относительно берега равна скорости течения $\vec{u}$. Туда его несёт течение к Б, обратно — течение к А.

Пункт 2. После ремонта. Скорость катера относительно воды теперь $2v = 10u$, течение прежнее. Самый быстрый рейс — снова с попутным течением в обе стороны, самый долгий — со встречным в обе стороны. С учётом (2):

$$t'_{\min} = \frac{2s}{2v+u} = \frac{2\cdot 3u\,t_1}{11u} = \frac{6}{11}\,t_1 = \frac{12}{11} \text{ ч} \approx 65 \text{ мин},$$

$$t'_{\max} = \frac{2s}{2v-u} = \frac{2\cdot 3u\,t_1}{9u} = \frac{2}{3}\,t_1 = \frac{4}{3}\text{ ч} = 80\text{ мин}.$$

Все возможные времена рейса — на рис. 3.

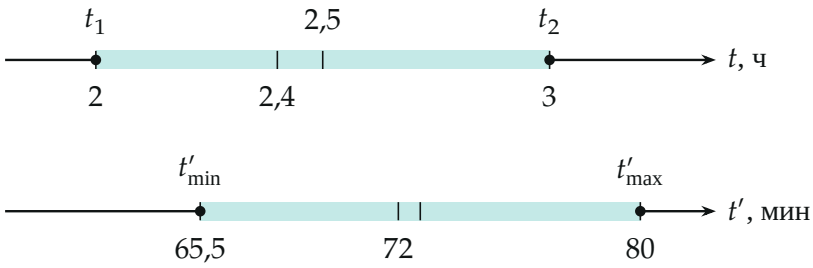


Рис. 3. Возможные времена рейса (бирюзовые отрезки): вверху — до поломки, внизу — после ремонта. Внутренние засечки: без течения (2,4 ч; 72 мин) и с течением, попутным только в одну сторону (2,5 ч; 72,7 мин).

Обратите внимание. Если считать, что течение весь рейс одно и то же, самым быстрым окажется рейс без течения, и ответы выйдут другими. Но тогда катер со сломанным мотором не вернулся бы: условие прямо говорит, что течение может смениться за время рейса.

Проверка. Размерность: s/u — время. Подстановка $v = 5u$, $s = 3ut_1$ в (1): $2s/(v+u) = 6ut_1/6u = t_1$ и $2s/(v-u) = 6ut_1/4u = 1{,}5\,t_1 = t_2$. Второй способ для пункта 2: время рейса обратно пропорционально скорости относительно берега, поэтому $t'_{\min} = t_1(v+u)/(2v+u) = 6t_1/11$ и $t'_{\max} = t_2(v-u)/(2v-u) = 4t_2/9 = 4/3$ ч — то же. Смысл: пока мотор работает, течение меняет время рейса лишь в полтора раза, а без мотора рейс в шесть раз дольше самого удачного.

Ответ. Со сломанным мотором минимальное время рейса $T_{\min} = 6t_1 = 12$ ч; после ремонта рейс может длиться от $t'_{\min} = \frac{6}{11}\,t_1 \approx 65$ мин до $t'_{\max} = \frac{2}{3}\,t_1 = 80$ мин.