Средняя скорость на пути семьи

Задача 2. [МОШ 2015/16, 7 класс, задача 2] **Средняя скорость на пути семьи.** Семья Петровых ехала на машине из города в деревню. Весь путь занял у них 2,5 часа. Известно, что средняя скорость машины за первые 2 часа пути равна 60 км/ч, а средняя скорость за последние 2 часа пути равна 80 км/ч. Отец попросил сына, зная это, вычислить среднюю скорость машины на всём пути. Подумав, сын справедливо сказал, что для этого недостаточно данных, но можно вычислить наименьшее и наибольшее возможное значение средней скорости, зная, что семья никогда не нарушает правила дорожного движения, а машина едет только вперёд. Согласно правилам, скорость машины везде на пути от города к деревне не должна превышать 90 км/ч. Найдите наименьшее и наибольшее возможное значение средней скорости машины Петровых.

▲ **Решение. Что происходит.** «Первые 2 часа» и «последние 2 часа» из 2,5 часов перекрываются на отрезке времени от 0,5 до 2 ч. Путь на нём неизвестен, но через него выражается всё остальное; ограничение 90 км/ч не даёт ему быть любым. Средняя скорость — весь путь, делённый на всё время.

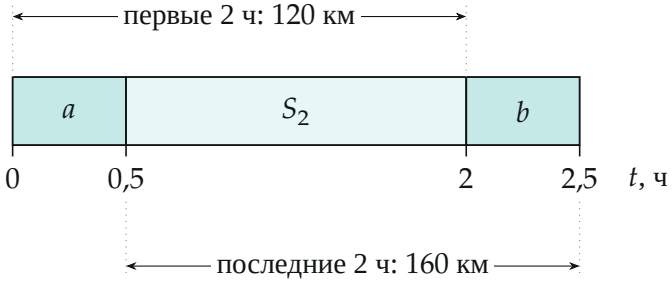


Рис. 1. Три отрезка времени: a — путь за первые полчаса, S_2 — путь за время от 0,5 до 2 ч (его захватывают оба интервала), b — путь за последние полчаса.

Обозначения. a, S_2, b — пути (км) на отрезках по рис. 1; S — весь путь; $v_{\max} = 90$ км/ч.

1. Уравнения по условию. Средняя скорость — путь, делённый на время. За первые 2 ч (отрезки a и S_2) средняя скорость 60 км/ч, за последние 2 ч (отрезки S_2 и b) — 80 км/ч:

$$a + S_2 = 60 \cdot 2 = 120, \qquad S_2 + b = 80 \cdot 2 = 160. \tag{1}$$

Отсюда $a = 120 - S_2$, $b = 160 - S_2$. Весь путь — сумма трёх отрезков; S_2 в сумму входит один раз:

$$S = a + S_2 + b = (120 - S_2) + S_2 + (160 - S_2) = 280 - S_2,$$

$$v_{\text{ср}} = \frac{S}{2{,}5\text{ ч}} = \frac{280 - S_2}{2{,}5}\ \text{км/ч}. \tag{2}$$

Средняя скорость тем больше, чем меньше S_2, и наоборот. Остаётся узнать, в каких пределах может лежать S_2.

2. Ограничения на S_2. Машина едет только вперёд, значит $a \geq 0$ и $b \geq 0$, а скорость не больше 90 км/ч, значит за каждые полчаса путь не больше $90 \cdot 0{,}5 = 45$ км (это относится и к первому, и к последнему получасу):

$$0 \leq a \leq 45 \ \Rightarrow\ 0 \leq 120 - S_2 \leq 45 \ \Rightarrow\ 75 \leq S_2 \leq 120,$$

$$0 \leq b \leq 45 \ \Rightarrow\ 0 \leq 160 - S_2 \leq 45 \ \Rightarrow\ 115 \leq S_2 \leq 160.$$

Обе пары неравенств должны выполняться разом, поэтому годится только общая часть (рис. 2):

$$115 \leq S_2 \leq 120.$$

Средний отрезок не мешает: $S_2 \leq 90 \cdot 1{,}5 = 135$ км.

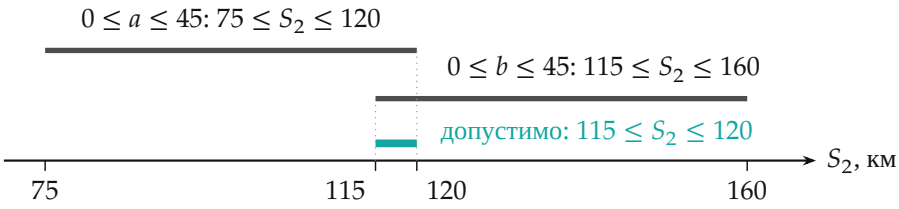


Рис. 2. Ограничения на S_2 из условий $0 \le a \le 45$ и $0 \le b \le 45$; допустимы только значения, лежащие в обоих отрезках.

3. Предельные значения средней скорости. Подставим края отрезка в (2):

$$S_2 = 115: \quad S = 165 \text{ км}, \quad v_{\text{ср}} = \frac{165}{2{,}5} = 66 \text{ км/ч};$$

$$S_2 = 120: \quad S = 160 \text{ км}, \quad v_{\text{ср}} = \frac{160}{2{,}5} = 64 \text{ км/ч}.$$

Оба случая осуществимы. При $S_2 = 115$ км: $a = 5$ км (едет медленно, 10 км/ч), в середине $115/1{,}5 \approx 76{,}7$ км/ч, в последние полчаса $b = 45$ км, ровно 90 км/ч. При $S_2 = 120$ км: $a = 0$ (первые полчаса машина стоит — назад она при этом не едет, условие не нарушено), в середине 80 км/ч, в конце $b = 40$ км, 80 км/ч. Графики пути на рис. 3.

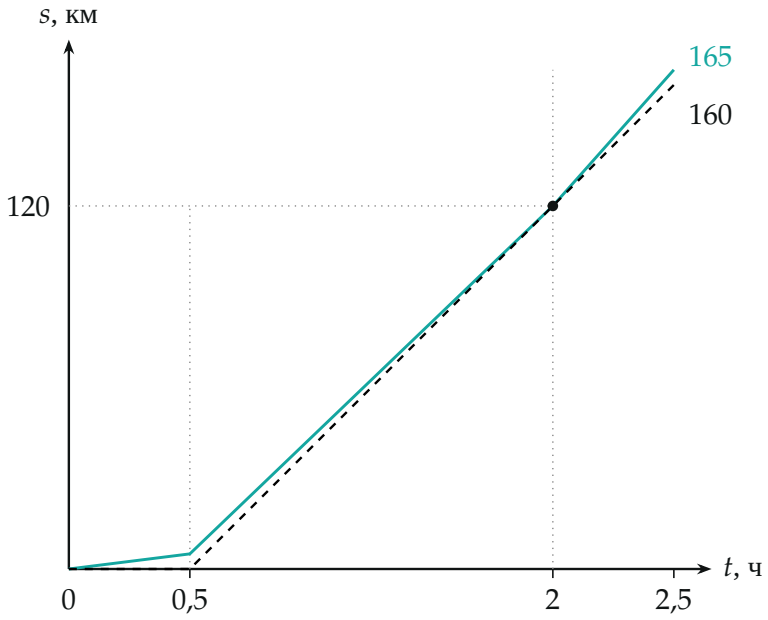


Рис. 3. Два крайних движения: $S_2 = 115$ км (бирюзовая линия, $v_{ср} = 66$ км/ч) и $S_2 = 120$ км (чёрный пунктир, $v_{ср} = 64$ км/ч). Обе линии проходят через точку (2 ч; 120 км).

Обратите внимание. Проверять надо ограничение 90 км/ч на оба краевых получаса, а не только на первый: именно последние полчаса ($b \leq 45$ км) отсекает значения S_2 от 75 до 115 км. Если взять только $a \leq 45$, получится $S_2 \geq 75$ и $v_{ср}$ до 82 км/ч — но тогда в последние полчаса машина прошла бы $160-75 = 85$ км, то есть ехала бы со скоростью 170 км/ч. Именно так получено значение 82 км/ч в ответе организаторов, поэтому верхняя граница там завышена.

Проверка. Размерность: пути в километрах, $v_{ср}$ в км/ч. При $S_2 = 115$ км и $S_2 = 120$ км все три отрезка соответствуют скоростям не больше 90 км/ч и условию (1): $5 + 115 = 120$, $115 + 45 = 160$ и $0 + 120 = 120$, $120 + 40 = 160$. Физический смысл: оба интервала почти охватывают весь путь, поэтому средняя скорость на всём пути близка к средней на этих интервалах: между 60 и 80, а точнее — 64–66 км/ч.

Ответ. Средняя скорость машины может лежать в пределах от $v_{ср.мин} = 64$ км/ч до $v_{ср.макс} = 66$ км/ч.