Яйца в специальном ящике

Задача 3. [МОШ 2015/16, 7 класс, задача 3] **Яйца в специальном ящике.** В тексте одной из задач задачника Григория Остера «Ненаглядное пособие по математике» написано следующее:

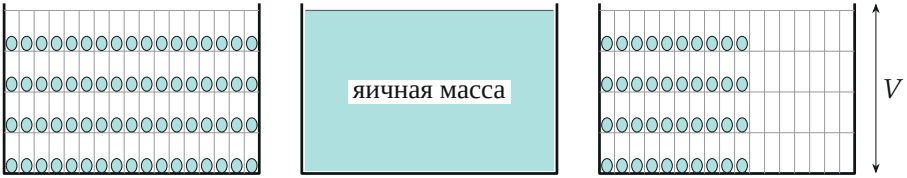
«В специальный ящик можно уложить 68 куриных яиц. Если уминать их ногами, то поместится в 100 раз больше».

С точки зрения физики, это может показаться странным. Жидкости (в частности, белок и желток куриных яиц) трудно поддаются сжатию. Поэтому плотности белка и желтка практически невозможно изменить, уминая яйца ногами. То же самое справедливо и в отношении яичной скорлупы. Поэтому, если яйца в ящике лежат вплотную друг к другу, то объём содержимого ящика нельзя изменить в такое большое число (100) раз.

Однако, в задаче сказано, что ящик — специальный. Можно предположить, что в ящике были специальные перегородки, за счёт которых яйца укладывались не вплотную, а на некотором расстоянии друг от друга, и большую часть объёма ящика занимал воздух. Предположим, что эти перегородки были лёгкими и тонкими: масса и объём всех перегородок пренебрежимо мала по сравнению с массой и объёмом всех яиц. Будем считать также, что при уминании яиц ногами белок и желток не выплёскиваются из ящика. Известно, что средняя плотность одного куриного яйца равна 1060 кг/м^3. Зная это, ответьте на следующие вопросы.

1. Чему равна средняя плотность содержимого специального ящика с 68 куриными яйцами?
2. Чему равна средняя плотность содержимого специального ящика, если в него положили только 40 яиц?

▲ **Решение. Что происходит.** Средняя плотность содержимого — это масса всего, что лежит в ящике, делённая на объём ящика: $\rho = m/V$. Объём ящика не меняется, а масса содержимого пропорциональна числу яиц. Умятые яйца — это сплошная жидкость и скорлупа без воздуха, их плотность та же, что у яйца, $\rho_я = 1060$ кг/м^3; в таком состоянии 6800 яиц как раз заполняют весь ящик. Отсюда находится объём ящика, а дальше обе плотности считаются одним законом $\rho = m/V$.



а) 68 яиц в перегородках

б) 6800 яиц умяты, воздуха нет

в) 40 яиц в перегородках

Рис. 1. Один и тот же ящик объёма V (схематично; яиц нарисовано ровно столько, сколько указано, у каждого яйца своя ячейка): с 68 яйцами в перегородках, с умятой яичной массой и с 40 яйцами.

Обозначения. m_0 и V_0 — масса и объём одного яйца, $\rho_я = m_0/V_0 = 1060$ кг/м^3; V — объём ящика (его содержимое занимает всё V: яйца и воздух; массу воздуха и перегородок не учитываем); N — число яиц в ящике.

1. Объём ящика. Умятые яйца сплошь заполняют ящик. Сколько их помещается, известно: $68 \cdot 100 = 6800$. Объём сплошной яичной массы равен сумме объёмов яиц, поскольку при умятии он не меняется (белок, желток и скорлупа не сжимаются, выплёскивания нет):

$$V = 6800\, V_0. \qquad (1)$$

То есть яйца в перегородках занимают всего $68V_0 = V/100$, остальные 99% ящика — воздух.

2. Средняя плотность содержимого с N яйцами. Масса содержимого — масса яиц Nm_0 (воздух и перегородки не считаем), объём — весь ящик V. Определение средней плотности:

$$\rho = \frac{Nm_0}{V} = \frac{Nm_0}{6800\, V_0} = \frac{N}{6800}\,\rho_я. \qquad (2)$$

Масса при том же V пропорциональна N, значит $\rho \propto N$ (рис. 2).

Пункт 1. $N = 68$:

$$\rho_1 = \frac{68}{6800}\,\rho_я = \frac{\rho_я}{100} = \frac{1060}{100}\ \text{кг/м}^3 = 10{,}6\ \text{кг/м}^3.$$

Пункт 2. $N = 40$:

$$\rho_2 = \frac{40}{6800}\rho_я = \frac{\rho_я}{170} = \frac{1060}{170}\ \text{кг/м}^3 \approx 6{,}2\ \text{кг/м}^3.$$

То же через первый результат: $\rho_2 = \rho_1 \cdot \dfrac{40}{68} = 10{,}6 \cdot 0{,}588 \approx 6{,}2\ \text{кг/м}^3$.

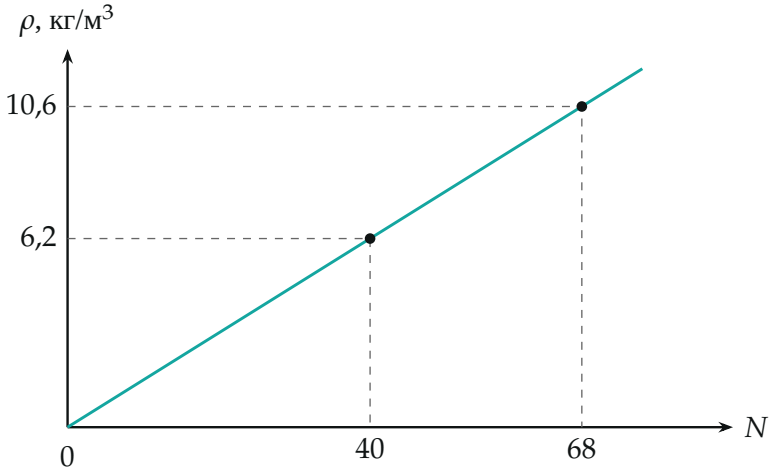


Рис. 2. Средняя плотность содержимого ящика $\rho = N\rho_я/6800$: при том же объёме она пропорциональна числу яиц.

Обратите внимание. Плотность содержимого ящика — по определению m/V с объёмом ящика. Плотность самих яиц $\rho_я$ не меняется, меняется доля объёма ящика, занятая яйцами.

Проверка. Размерность: $\rho = m/V$, кг/м^3. Предел $N = 6800$: $\rho = \rho_я$ — ящик полон яичной массой, это умятое состояние. Смысл: ящик почти пуст — яйца занимают лишь сотую долю его объёма, поэтому плотность содержимого в сто раз меньше плотности яйца. Масса воздуха (около 1,2 кг/м^3 в объёме ящика) добавила бы к найденным значениям ещё около 1,2 кг/м^3; как и организаторы, массу воздуха не учитываем.

Ответ. 1) $\rho_1 = \dfrac{\rho_я}{100} = 10{,}6\ \text{кг/м}^3$; 2) $\rho_2 = \dfrac{\rho_я}{170} \approx 6{,}2\ \text{кг/м}^3$.