Автобус и средняя скорость за треть времени

Задача 5. [МОШ 2015/16, 7 класс, задача 5] **Автобус и средняя скорость за треть времени.** Первую половину пути автобус ехал со скоростью в 8 раз большей, чем вторую. Средняя скорость автобуса на всём пути оказалась равной 16 км/ч. Найдите среднюю скорость автобуса за первую треть времени движения.

▲ **Решение. Что происходит.** Автобус проезжает равные пути с разными скоростями, поэтому времена на них разные: на быстрой половине — в 8 раз меньше. Средняя скорость на всём пути — весь путь, делённый на всё время (не среднее арифметическое двух скоростей). Условие «16 км/ч на всём пути» позволяет найти обе скорости, а потом разделить на периоды в долях времени и посчитать путь за первую треть времени.

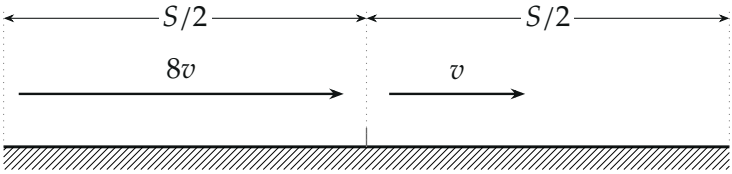


Рис. 1. Две половины пути одинаковой длины: первую автобус едет со скоростью $8v$, вторую — со скоростью v.

Обозначения. S — весь путь; v — скорость на второй половине, $8v$ — на первой; T — всё время в пути; t_1, t_2 — времена на первой и второй половинах; $V_{\text{ср}} = 16$ км/ч — средняя скорость на всём пути; $U_{\text{ср}}$ — искомая средняя скорость за первую треть времени, $T/3$.

1. Времена на половинах. Равномерное движение: время = путь / скорость.

$$t_1 = \frac{S/2}{8v} = \frac{S}{16v}, \qquad t_2 = \frac{S/2}{v} = \frac{S}{2v} = 8t_1.$$

Значит $T = t_1 + t_2 = 9t_1$: быстрая часть занимает $\frac{1}{9}$ всего времени, а медленная — $\frac{8}{9}$ (рис. 2).

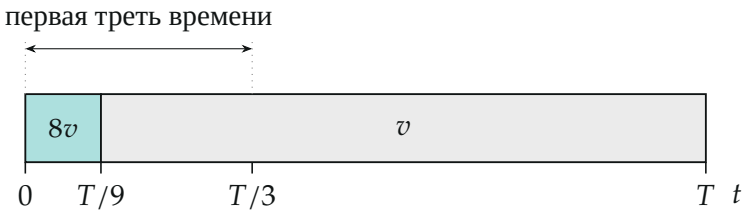


Рис. 2. Ось времени в масштабе: быстрая часть пути (бирюзовая) занимает $T/9$, медленная — $8T/9$.

2. Скорости. По определению средней скорости

$$V_{\text{ср}} = \frac{S}{T} = \frac{S}{9t_1} = \frac{S}{9} \cdot \frac{16v}{S} = \frac{16}{9}\,v. \qquad (1)$$

Отсюда $v = \dfrac{9}{16}V_{\text{ср}} = 9$ км/ч и $8v = 72$ км/ч.

3. Что происходит за первую треть времени. Быстро автобус едет $T/9$, остаток первой трети — $T/3 - T/9 = 2T/9$ — медленно (рис. 2). Путь за первую треть:

$$S_{1/3} = 8v \cdot \frac{T}{9} + v \cdot \frac{2T}{9} = \frac{10}{9}\,vT.$$

Средняя скорость за это время — путь, делённый на $T/3$:

$$U_{\text{ср}} = \frac{S_{1/3}}{T/3} = \frac{10}{9}\,v \cdot 3 = \frac{10}{3}\,v. \qquad (2)$$

Подставим $v = \dfrac{9}{16}V_{\text{ср}}$ из (1): $U_{\text{ср}} = \dfrac{10}{3} \cdot \dfrac{9}{16}V_{\text{ср}} = \dfrac{15}{8}V_{\text{ср}} = 30$ км/ч.

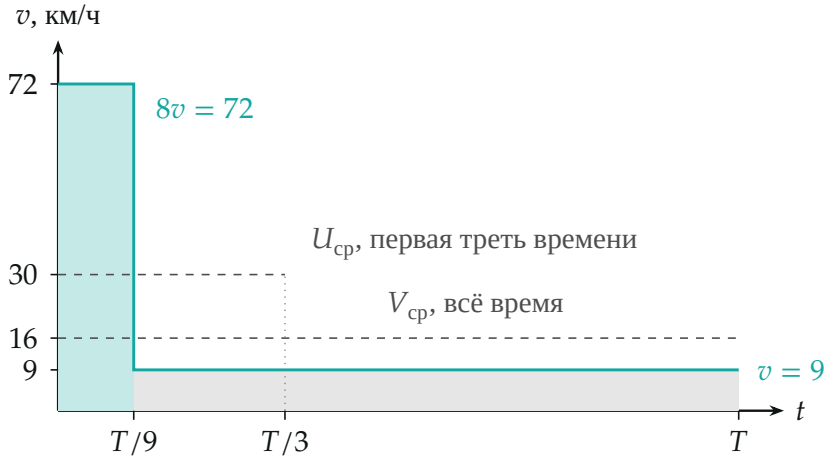


Рис. 3. График скорости $v(t)$. Площадь под ступенькой — пройденный путь: за первую треть времени она даёт среднюю скорость 30 км/ч (верхний пунктир), за всё время — 16 км/ч (нижний).

Обратите внимание. Средняя скорость на всём пути — не среднее арифметическое 72 и 9 (то было бы 40,5 км/ч): на медленной половине автобус проводит в 8 раз больше времени. Среднюю скорость за первую треть времени тоже считают через путь: путь за $T/3$ делят на $T/3$.

Проверка. Размерность: км/ч. Путь за всё время $S = V_{\text{ср}}T = 16T$; быстрая половина $72 \cdot T/9 = 8T = S/2$ — верно, медленная $9 \cdot 8T/9 = 8T$ — верно. Путь за первую треть $72 \cdot T/9 + 9 \cdot 2T/9 = 8T + 2T = 10T$, средняя $10T/(T/3) = 30$ км/ч. Смысл: в первую треть времени вошла вся быстрая часть пути, поэтому средняя скорость там почти вдвое больше, чем на всём пути.

Ответ. Средняя скорость автобуса за первую треть времени движения $U_{\text{ср}} = \dfrac{15}{8}V_{\text{ср}} = 30$ км/ч.