Турист и поезд на мосту

Задача 6. [МОШ 2015/16, 7 класс, задача 6] **Турист и поезд на мосту.** Турист переходил узкий железнодорожный мост в направлении от точки A к точке B (см. рисунок). Находясь на расстоянии $d = 50$ м от середины моста, ближе к точке B, он увидел поезд, движущийся ему навстречу со скоростью $V = 54$ км/ч, который в этот момент находился на расстоянии $S = 300$ м от туриста. Турист побежал вперёд, навстречу поезду, с постоянной скоростью $v = 5$ м/с, и успел достигнуть точки B в момент, когда поезд находился на расстоянии $h = 60$ м от этой точки.

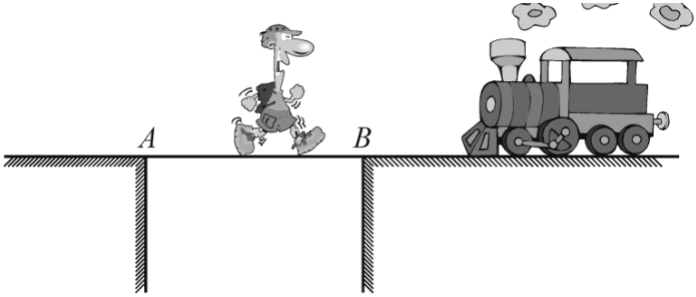


Рис. 1. Рисунок организаторов.

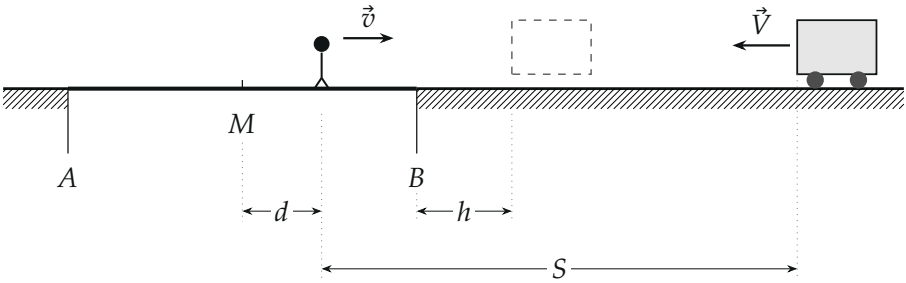


Рис. 2. Поясняющий рисунок в масштабе: M — середина моста; штриховой контур — поезд в момент, когда турист добежал до B.

Успел бы турист добежать до точки A, если бы он, увидев поезд, мгновенно развернулся и побежал с такой же скоростью назад? Если да, то

на каком расстоянии от точки A находился бы поезд в момент, когда турист достиг бы этой точки? Если нет, то на каком расстоянии от точки A поезд мог бы догнать его? Скорость поезда постоянна.

▲ **Решение. Что происходит.** Всё движение равномерное, а положения и туриста, и поезда в любой момент записываются через время. Сначала по описанному в условии бегу вперёд надо найти неизвестную длину моста: турист пробежал до B некое расстояние ℓ, и за это же время поезд проехал $S - h - \ell$. Потом для бега назад два уравнения — «когда турист добежит до A» и «когда поезд поравняется с туристом» — сравнивают времена.

Обозначения. x — координата вдоль моста, ось направлена от A к B, начало — точка A. Скорости в проекции на ось: турист при беге вперёд $+v$, назад $-v$; поезд едет к A, поэтому его проекция $-V$ в обоих случаях (поезд ведёт себя одинаково). L — длина моста, x_0 — расстояние от A до туриста в начальный момент, ℓ — расстояние от туриста до B в этот момент. $V = 54$ км/ч $= 15$ м/с.

1. Длина моста из бега вперёд. Турист пробегает $\ell = L - x_0$ за время $t_1 = \ell/v$. Положение поезда — $x_p(t) = x_0 + S - Vt$ (в начале он на расстоянии S от туриста). В момент t_1 поезд на расстоянии h от B, то есть $x_p(t_1) = L + h$ (рис. 3):

$$x_0 + S - V\frac{\ell}{v} = L + h.$$

Так как $x_0 = L - \ell$, это даёт $S - \ell - V\dfrac{\ell}{v} = h$, откуда

$$\ell\Big(1 + \frac{V}{v}\Big) = S - h \quad \Rightarrow \quad \ell = \frac{v(S-h)}{V+v} = \frac{5 \cdot 240}{15+5}\ \text{м} = 60\ \text{м}.$$

Смысл формулы: турист и поезд сближаются со скоростью $V + v$, и за время бега расстояние между ними уменьшается на $S - h$.

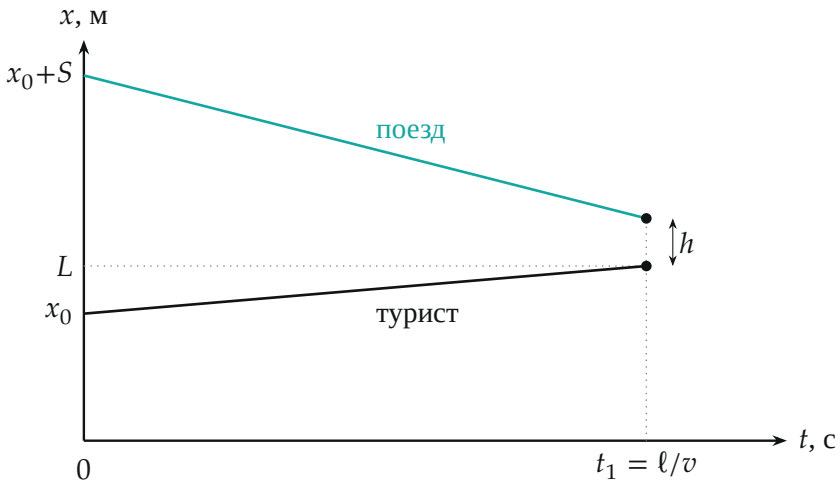


Рис. 3. Движение вперёд. К моменту t_1 турист достигает B ($x = L$), а поезд оказывается на расстоянии h от B (положение поезда $x = L + h$).

Длина моста. Турист был на расстоянии d от середины, ближе к B, поэтому $x_0 = \dfrac{L}{2} + d$. Вместе с $x_0 = L - \ell$ получаем

$$\frac{L}{2} = \ell + d, \quad L = 2(\ell + d) = 220 \text{ м}, \quad x_0 = L - \ell = 160 \text{ м}.$$

До A туристу, значит, бежать $x_0 = 160$ м (проверка: $\ell + 2d = 60 + 100 = 160$ м).

2. Бег назад. Турист и поезд стартуют из тех же положений (x_0 и $x_0 + S$), поезд движется так же. Теперь проекция скорости туриста $-v$:

$$x_T(t) = x_0 - vt, \qquad x_p(t) = x_0 + S - Vt.$$

Закон здесь — равномерное движение каждого тела по оси x; поезд едет быстрее туриста ($V > v$) и догоняет его.

Когда турист добежал бы до A. $x_T = 0$:

$$t_A = \frac{x_0}{v} = \frac{160}{5} \text{ с} = 32 \text{ с}.$$

Когда поезд догонит туриста. Координаты равны, $x_p = x_T$:

$$x_0 + S - Vt = x_0 - vt \quad \Rightarrow \quad t_в = \frac{S}{V - v} = \frac{300}{15 - 5}\ \text{с} = 30\ \text{с}.$$

Поезд догоняет туриста со скоростью сближения $V - v$ (оба едут в одну сторону, к A), а не $V + v$, как при беге вперёд.

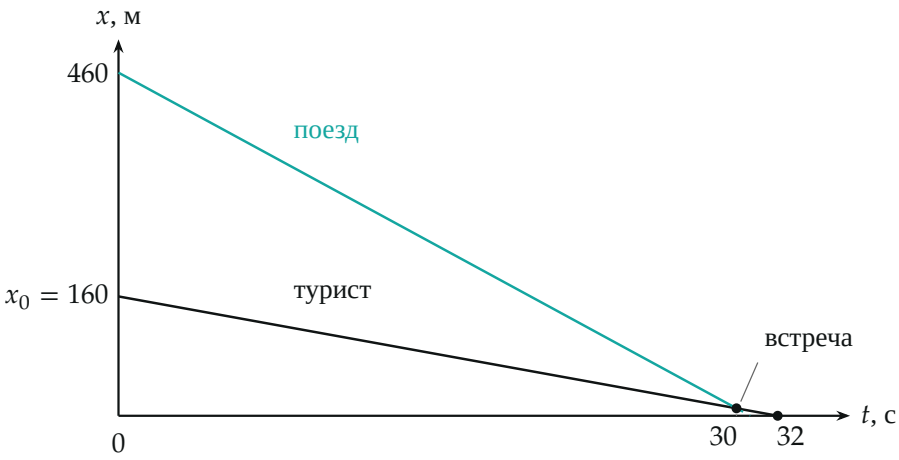


Рис. 4. Бег назад. Прямые пересекаются (встреча) при $t = 30$ с в точке $x = 10$ м, раньше, чем турист достиг бы A ($t = 32$ с): поезд догоняет туриста на мосту.

Так как $t_в = 30\ \text{с} < t_A = 32\ \text{с}$, турист *не успел бы* добежать до A: поезд догнал бы его за 2 с до цели. Место встречи:

$$x_T(t_в) = x_0 - vt_в = 160 - 5 \cdot 30 = 10\ \text{м}.$$

Одной формулой (для расстояния от A):

$$x = \frac{v(S - h)}{V + v} + 2d - \frac{Sv}{V - v} = 60 + 100 - 150 = 10\ \text{м}.$$

Обратите внимание. Скорость сближения зависит от направлений: при беге навстречу поезду скорости складываются ($V + v$, и именно

поэтому по условию бега вперёд находится ℓ), при беге от поезда — вычитаются ($V - v$). На этом различии построена вся задача.

Проверка. Размерность: $v(S - h)/(V + v)$ — (м/с) м /(м/с) = м. Положение поезда в момент встречи: $460 - 15 \cdot 30 = 10$ м — совпало с положением туриста. Пробег туриста до встречи $5 \cdot 30 = 150$ м, поезд проехал 450 м, их разность 300 м — как раз начальное расстояние S. Смысл: поезд почти догнал туриста у самого A (на мосту осталось всего 10 м), то есть вперёд бежать было верным решением.

Ответ. Турист не успел бы добежать до A: поезд догнал бы его на расстоянии 10 м от точки A.