Лёд в зелёной жидкости

Задача 7. [МОШ 2015/16, 7 класс, задача 7] **Лёд в зелёной жидкости.** В цилиндрический стакан до половины налили зелёную жидкость, которая не смешивается и никак не реагирует с водой, после чего отметили на стенке уровень жидкости. Затем в стакан опустили маленький кусочек льда (объём кусочка гораздо меньше объёма жидкости). При этом уровень зелёной жидкости в стакане поднялся на величину x. После того, как весь лёд растаял, уровень зелёной жидкости над **начальной** отметкой составил y. Постройте график зависимости отношения y/x от плотности ρ зелёной жидкости.

▲ **Решение. Что происходит.** Уровень жидкости в цилиндре поднимается на объём, который вытесняет погружённая в неё часть тела, делённый на площадь сечения. Лёд вытесняет один объём, а талая вода, куда бы она ни попала, — другой. Куда деваться воде, определяет её плотность по сравнению с плотностью зелёной жидкости: она тонет, если тяжелее, и растекается сверху, если легче. Поэтому надо перебрать три случая: зелёная жидкость легче льда, между льдом и водой, тяжелее воды; в каждом найти x и y.

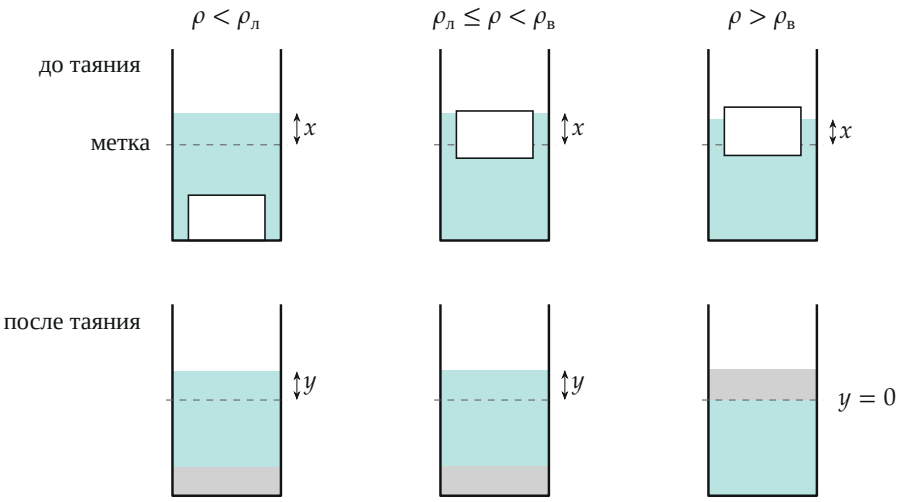


Рис. 1. Три случая (схематично; объём льда и воды согласован с подъёмами уровня). Зелёная жидкость — бирюзовая заливка, вода — серая, лёд — белый

блок. Пунктир — начальная отметка уровня; x и y — подъёмы уровня зелёной жидкости над отметкой до и после таяния.

Обозначения. S — площадь сечения стакана; m — масса льда; ρ — плотность зелёной жидкости; $\rho_л = 900$ кг/м^3 и $\rho_в = 1000$ кг/м^3 — плотности льда и воды (стандартные значения, в условии не заданы; ответ от точных чисел не зависит, важны лишь $\rho_л < \rho_в$ и их отношение). Масса при таянии не меняется: лёд массой m превращается в воду массой m, её объём $V_в = m/\rho_в$ меньше объёма льда $V_л = m/\rho_л$.

Как считать подъём уровня (зачем: одно правило для всех случаев). Зелёная жидкость и всё, что в неё погружено, занимают объём $V_0 + W$ (здесь V_0 — объём жидкости до опускания, W — объём погружённой части тела), поэтому уровень поднимется на

$$\Delta h = \frac{W}{S}.$$

Для плавающего тела W находится из закона Архимеда: вес тела равен весу вытесненной жидкости, $mg = \rho g W$, то есть $W = m/\rho$; для утонувшего — это просто объём тела.

Случай 1: $\rho < \rho_л$ (жидкость легче льда). Лёд тонет и лежит на дне, погружён целиком: $W = V_л = m/\rho_л$, откуда

$$x = \frac{m}{\rho_л S}.$$

Талая вода плотнее зелёной жидкости ($\rho_в > \rho_л > \rho$), она остаётся на дне слоем под зелёной жидкостью, и из объёма в стакане добавилось только $V_в = m/\rho_в$:

$$y = \frac{m}{\rho_в S}, \qquad \frac{y}{x} = \frac{\rho_л}{\rho_в} = 0{,}9.$$

Отношение не зависит от ρ: на графике горизонтальный участок на уровне 0,9.

Случай 2: $\rho_л \le \rho < \rho_в$. Лёд плавает (его плотность не больше, чем у

жидкости), погружённый объём $W = m/\rho$:

$$x = \frac{m}{\rho S}.$$

Вода плотнее зелёной жидкости ($\rho_в > \rho$), поэтому снова оседает на дно, и $y = m/(\rho_в S)$:

$$\frac{y}{x} = \frac{m/(\rho_в S)}{m/(\rho S)} = \frac{\rho}{\rho_в}.$$

Отношение растёт прямо пропорционально ρ: от $\rho_л/\rho_в = 0{,}9$ при $\rho = \rho_л$ (там график непрерывно переходит из случая 1) до 1 при $\rho \to \rho_в$.

Случай 3: $\rho > \rho_в$. Лёд плавает, $x = m/(\rho S)$. Вода *легче* зелёной жидкости, поэтому не тонет: она остаётся сверху и растекается слоем (с зелёной жидкостью не смешивается). Весь объём зелёной жидкости под ней остался прежним V_0 — значит, её поверхность вернулась на отметку, $y = 0$ и $y/x = 0$.

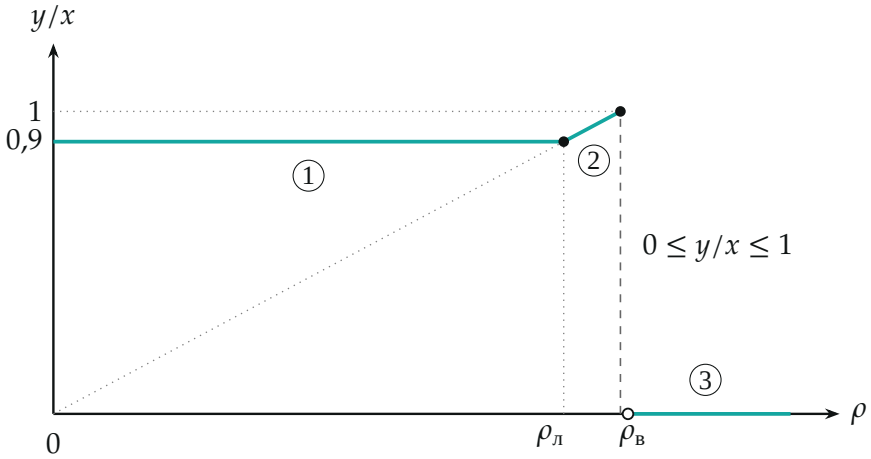


Рис. 2. График зависимости y/x от плотности ρ зелёной жидкости (номера — случаи 1, 2, 3). При $\rho = \rho_в$ (вертикальный пунктир) значение не определено, конец третьего участка — белый кружок.

Случай $\rho = \rho_в$ (граница). Плотности воды и зелёной жидкости равны, вода ни тонет, ни всплывает и может оказаться где угодно: внутри

жидкости (тогда $y = m/(\rho_в S) = x$, $y/x = 1$) или наверху (тогда $y = 0$). Значение y/x при $\rho = \rho_в$ не определено, лежит от 0 до 1; на графике — вертикальный пунктир (справа от него — нуль, слева — единица).

Обратите внимание. (1) Подъём уровня даёт только *погружённая* часть плавающего льда: в случаях 2 и 3 $x = m/(\rho S)$, а не $V_л/S$. (2) В случае 3 вода всплывает и не прибавляет объёма *зелёной* жидкости: вопрос задачи — про уровень именно её, поэтому $y = 0$, хотя общий уровень в стакане выше метки.

Проверка. Размерность: y/x безразмерно. Непрерывность на $\rho = \rho_л$: случай 1 даёт 0,9, случай 2 — $\rho_л/\rho_в = 0{,}9$. Предел $\rho \to \rho_в$ слева: $y/x \to 1$, и это физично — у воды и жидкости одинаковая плотность, и вытесняют они одинаковый объём. Смысл: пока талая вода тонет, уровень после таяния не выше, чем со льдом ($y \le x$); как только вода становится легче жидкости и всплывает, уровень зелёной жидкости возвращается к метке.

Ответ. График: при $\rho < \rho_л$ значение $y/x = \rho_л/\rho_в = 0{,}9$ (горизонтальный отрезок); при $\rho_л \le \rho < \rho_в$ значение $y/x = \rho/\rho_в$ растёт линейно от 0,9 до 1; при $\rho > \rho_в$ значение $y/x = 0$; при $\rho = \rho_в$ не определено (0 … 1).