Рычаг и шарик в масле и воде

Задача 8. [МОШ 2015/16, 7 класс, задача 8] **Рычаг и шарик в масле и воде.** К правому концу A стержня, масса которого пренебрежимо мала, подвесили на тонкой нити алюминиевый шарик. Стержень положили на край сосуда с машинным маслом (как показано на рисунке), а к точке B, находящейся на расстоянии $l_1 = 50$ см слева от точки опоры O, подвесили груз массой $m_1 = 2{,}3$ кг. При этом шарик оказался погружён в масло на половину своего объёма. Затем груз m_1 сняли, а стержень с шаром перенесли и положили на край сосуда с водой так, что точка опоры O осталась прежней. Груз какой массой m_2 надо подвесить к другому концу стержня C, находящемуся на расстоянии $l_2 = 110$ см от точки O, чтобы алюминиевый шарик снова оказался погружённым на половину своего объёма? Плотности алюминия, машинного масла и воды равны $\rho_а = 2700$ кг/м^3, $\rho_м = 800$ кг/м^3 и $\rho_в = 1000$ кг/м^3, соответственно. Перед погружением шарика в воду его тщательно протёрли от масла.

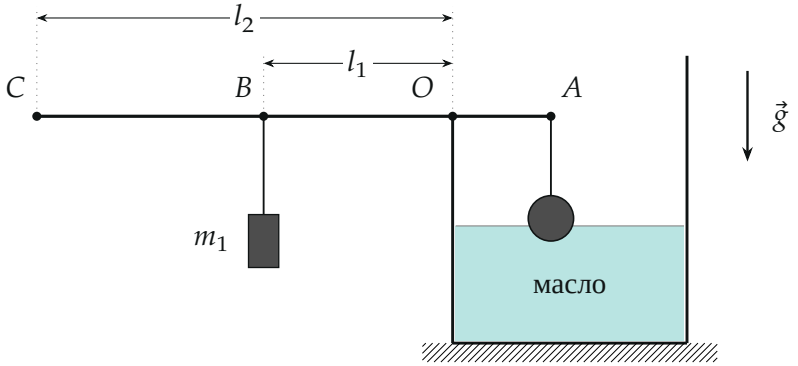


Рис. 1. Схема условия: стержень CA лежит на краю сосуда в точке O, на нити в A висит шарик в масле, груз m_1 подвешен в точке B (в опыте 2 вместо него груз m_2 в точке C).

▲ **Решение. Что происходит.** Стержень с грузами — рычаг, он находится в равновесии, и для него годится правило моментов относительно опоры O: сумма моментов сил, вращающих по часовой стрелке, равна сумме моментов против часовой (опора O момента не создаёт, поэтому

её реакция в уравнение не входит). Справа на стержень действует нить с шариком: сила её натяжения равна не весу шарика, а весу минус сила Архимеда. Неизвестны длина OA и объём шарика — обозначим их a и V и покажем, что они сократятся при делении двух уравнений (два опыта — два уравнения).

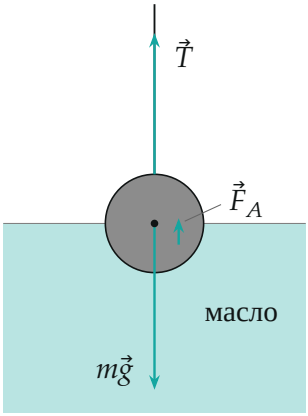


Рис. 2. Силы на шарик (в масле, погружён наполовину; длины стрелок — в масштабе $T : F_A : mg = 2300 : 400 : 2700$): $\vec{T}$ — сила натяжения нити, $\vec{F}_A$ — сила Архимеда, $m\vec{g}$ — сила тяжести.

Обозначения. V — объём шарика; $m = \rho_а V$ — его масса; $a = OA$ — длина правого плеча; T_1, T_2 — силы натяжения нити в опытах 1 и 2; $\rho_ж$ — плотность жидкости ($\rho_м$ или $\rho_в$).

1. Сила натяжения нити. Шарик неподвижен, поэтому векторная сумма сил на него равна нулю. Ось y направим вверх, проекции: T вверх, F_A вверх, mg вниз:

$$T + F_A - mg = 0 \quad \Rightarrow \quad T = mg - F_A.$$

Сила Архимеда — вес вытесненной жидкости; в жидкости половина шарика, $V/2$:

$$F_A = \rho_ж g \frac{V}{2}.$$

Нить лёгкая, поэтому по третьему закону Ньютона она тянет конец A

вниз с той же силой T:

$$T = \rho_а V g - \rho_ж \frac{V}{2} g = \left(\rho_а - \frac{\rho_ж}{2}\right) V g. \qquad (1)$$

2. Условие равновесия рычага (правило моментов относительно O). Сила груза $m_1 g$ приложена в B на плече l_1 и вращает стержень против часовой стрелки; сила T_1 приложена в A на плече a и вращает по часовой. Равновесие:

$$m_1 g\, l_1 = T_1\, a. \qquad (2)$$

Во втором опыте груз m_2 в C (плечо l_2), нить с силой T_2 в A:

$$m_2 g\, l_2 = T_2\, a. \qquad (3)$$

Тот же рычаг, та же точка опоры, тот же шарик — значит, a и V в обоих опытах одни и те же.

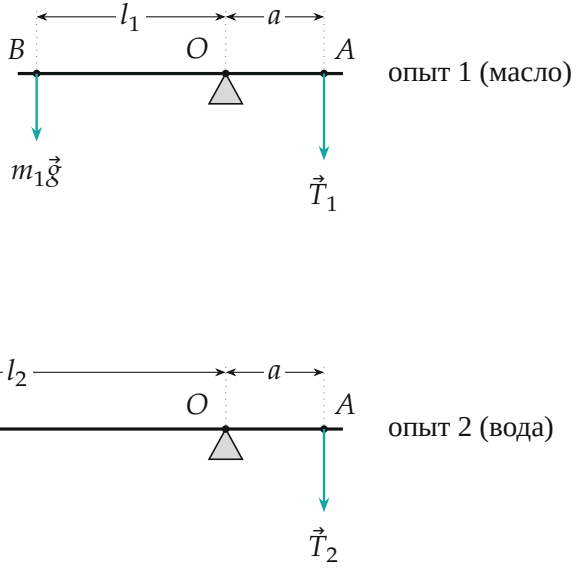


Рис. 3. Силы, приложенные к стержню (реакция опоры O в уравнения не входит, так как её плечо равно нулю). Длины стрелок соответствуют $T_1 : T_2 \approx 1{,}05$ и условным значениям грузов.

3. Исключаем неизвестные. Подставим (1) с $\rho_ж = \rho_м$ в (2) и с $\rho_ж = \rho_в$ в (3):

$$m_1 l_1 = \left(\rho_а - \frac{\rho_м}{2}\right) Va, \qquad m_2 l_2 = \left(\rho_а - \frac{\rho_в}{2}\right) Va.$$

Разделим второе уравнение на первое: произведение Va сокращается.

$$\frac{m_2 l_2}{m_1 l_1} = \frac{\rho_а - \rho_в/2}{\rho_а - \rho_м/2} = \frac{2\rho_а - \rho_в}{2\rho_а - \rho_м}.$$

Откуда

$$m_2 = \frac{2\rho_а - \rho_в}{2\rho_а - \rho_м} \cdot \frac{l_1}{l_2} m_1.$$

Числа (отношение плеч $l_1/l_2 = 50/110 = 5/11$):

$$m_2 = \frac{5400 - 1000}{5400 - 800} \cdot \frac{5}{11} \cdot 2{,}3\text{ кг} = \frac{4400}{4600} \cdot \frac{5}{11} \cdot 2{,}3\text{ кг} = \frac{22}{23} \cdot \frac{5}{11} \cdot 2{,}3\text{ кг} = 1{,}0\text{ кг}.$$

Обратите внимание. (1) Шарик протирают от масла, чтобы масло не прибавляло ему массы, иначе T_2 был бы другим. (2) Плечи считаются от опоры O до точек подвеса, а не длины всего стержня; поэтому и нужно сократить именно Va — плечо OA и объём V по условию неизвестны.

Проверка. Размерность: m_2 получается из m_1 умножением на безразмерные отношения плотностей и плеч. Предел: если бы жидкость в опыте 2 была та же, что в первом ($\rho_в = \rho_м$), то $m_2 l_2 = m_1 l_1$, как и должно быть для одного и того же груза и плеча. Численно сила в опыте 2 чуть меньше, чем в опыте 1: $T_2/T_1 = 2200/2300 \approx 0{,}96$ (вода плотнее масла, Архимед больше, натяжение меньше), а плечо l_2 больше в 2,2 раза: поэтому груз m_2 меньше m_1 в 2,3 раза. Смысл: длинное плечо позволяет уравновесить тот же момент в разы меньшим грузом.

Ответ. К другому концу стержня надо подвесить груз массой $m_2 = \dfrac{2\rho_а - \rho_в}{2\rho_а - \rho_м} \cdot \dfrac{l_1}{l_2} m_1 = 1$ кг.