Туристы и дальность рации

Задача 1. [МОШ 2015/16, 8 класс, задача 1] Две группы туристов одновременно вышли из турбазы в двух противоположных направлениях. Группы поддерживают между собой связь по рации, радиус действия которой равен $R = 10$ км. Первая группа, пройдя путь $S_1 = 2$ км по лесу, вышла из леса и увеличила свою скорость на $\Delta v = 1{,}5$ км/ч, и спустя $t_1 = 40$ минут после этого связь по рации прервалась. Вторая группа после $t_2 = 30$ минут ходьбы уменьшила свою скорость в $n = 1{,}2$ раза, и после того, как она прошла ещё $S_2 = 3$ км, связь по рации прервалась. Найдите скорости каждой группы сразу после выхода из турбазы. Туристы движутся всё время по одной прямой, не меняя направления своего движения. Ответы дайте в численном виде, округлив до десятых долей км/ч.

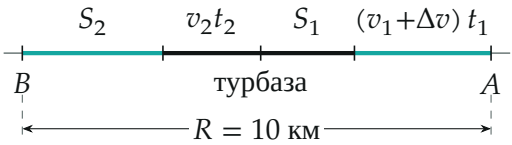


Рис. 1. Положение групп в момент обрыва связи (A — первая группа, B — вторая); чёрным — путь до смены скорости, бирюзовым — после. Масштаб соответствует найденным скоростям

▲ **Решение.** **Что происходит.** Группы расходятся в противоположные стороны от одной точки, поэтому расстояние между ними равно сумме их путей от турбазы: $s_1 + s_2$. Связь пропадает, когда эта сумма впервые достигает R. Обе группы вышли вместе и шли до этого момента одно и то же время T. Главная идея: у нас два неизвестных, v_1 и v_2, и два условия — сумма путей равна R и время T у групп одинаково.

Обозначения. v_1, v_2 — скорости групп сразу после выхода (до смены скорости), км/ч; T — время от выхода до обрыва связи, ч; s_1, s_2 — пути групп от турбазы к этому моменту. Время переведём в часы: $t_1 = \frac{2}{3}$ ч, $t_2 = \frac{1}{2}$ ч.

1. Путь первой группы. Сначала она идёт S_1 со скоростью v_1, затем время t_1 со скоростью $v_1 + \Delta v$ (дальше связь прерывается, так что этот

участок идёт до самого обрыва):

$$s_1 = S_1 + (v_1 + \Delta v)\, t_1.$$

2. Путь второй группы. Время t_2 она идёт со скоростью v_2, затем проходит S_2 со скоростью v_2/n:

$$s_2 = v_2 t_2 + S_2.$$

3. Условие обрыва связи. Группы идут в противоположные стороны по одной прямой, поэтому расстояние между ними $s_1 + s_2$; связь прервалась, когда оно стало равно R:

$$S_1 + (v_1 + \Delta v)\, t_1 + v_2 t_2 + S_2 = R.$$

Подставим числа: $2 + (v_1 + 1{,}5)\frac{2}{3} + \frac{1}{2}v_2 + 3 = 10$, откуда

$$\tfrac{2}{3}\, v_1 + \tfrac{1}{2}\, v_2 = 4, \qquad v_2 = 8 - \tfrac{4}{3}\, v_1. \tag{1}$$

4. Условие одного времени. Первая группа шла S_1/v_1 до выхода из леса и ещё t_1 после, поэтому $T = S_1/v_1 + t_1$. Вторая группа шла t_2 с первой скоростью и ещё проходила S_2 со скоростью v_2/n, на что ушло nS_2/v_2; значит, $T = t_2 + nS_2/v_2$. Связь прервалась у обеих групп в один и тот же момент, поэтому

$$\frac{S_1}{v_1} + t_1 = t_2 + \frac{nS_2}{v_2} \quad \Longrightarrow \quad \frac{2}{v_1} + \frac{1}{6} = \frac{3{,}6}{v_2}. \tag{2}$$

5. Решаем систему. Подставим v_2 из (1) в (2). Правая часть: $3{,}6/(8 - \frac{4}{3}v_1) = 2{,}7/(6 - v_1)$; левая: $\frac{2}{v_1} + \frac{1}{6} = \frac{12+v_1}{6v_1}$. Получаем

$$\frac{12 + v_1}{6v_1} = \frac{2{,}7}{6 - v_1} \implies (12 + v_1)(6 - v_1) = 16{,}2\, v_1,$$

$$72 - 6v_1 - v_1^2 = 16{,}2\, v_1 \implies 5v_1^2 + 111\, v_1 - 360 = 0.$$

Дискриминант $111^2 + 4 \cdot 5 \cdot 360 = 19521$, $\sqrt{19521} \approx 139{,}7$. Корни:

$$v_1 = \frac{-111 \pm 139{,}7}{10}: \qquad v_1 \approx 2{,}87 \text{ км/ч} \quad \text{или} \quad v_1 \approx -25{,}1 \text{ км/ч}.$$

Отрицательная скорость не подходит: группа идёт от турбазы, а не к ней. Значит, $v_1 \approx 2{,}87$ км/ч, и из (1)

$$v_2 = 8 - \tfrac{4}{3} \cdot 2{,}87 \approx 4{,}17 \text{ км/ч}.$$

Обратите внимание: округлять до десятых нужно только в конце. Если подставить в (1) уже округлённое $v_1 = 2{,}9$, получится $v_2 \approx 4{,}13 \approx 4{,}1$ км/ч, а правильный ответ 4,2 км/ч.

Обратите внимание: $t_1 = 40$ мин отсчитывается не от выхода с турбазы, а от выхода из леса; полное время T первой группы — это $S_1/v_1 + t_1$, и $T \neq t_1$.

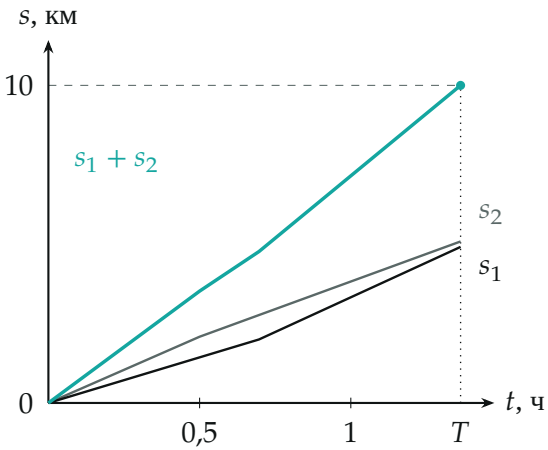


Рис. 2. Пути групп от турбазы и их сумма: сумма достигает R в момент T

Проверка. Время первой группы: $T = 2/2{,}872 + \frac{2}{3} \approx 1{,}363$ ч. Время второй: $\frac{1}{2} + 3{,}6/4{,}171 \approx 1{,}363$ ч — совпало. Пути: $s_1 = 2 + 4{,}372 \cdot \frac{2}{3} \approx 4{,}915$ км, $s_2 = 0{,}5 \cdot 4{,}171 + 3 \approx 5{,}085$ км, сумма 10,00 км $= R$. Скорость второй группы после замедления $4{,}171/1{,}2 \approx 3{,}48$ км/ч меньше v_2, как и сказано в условии; первая группа ускорилась с 2,87 до 4,37 км/ч. График

(рис. 2) показывает то же: сумма $s_1 + s_2$ растёт с изломами в моменты смены скорости и достигает R в момент T. Физический смысл: пока обе группы идут, расстояние между ними растёт, и обрыв связи пришёл на 1,36 ч после старта.

Ответ. $v_1 \approx 2{,}9$ км/ч, $v_2 \approx 4{,}2$ км/ч.