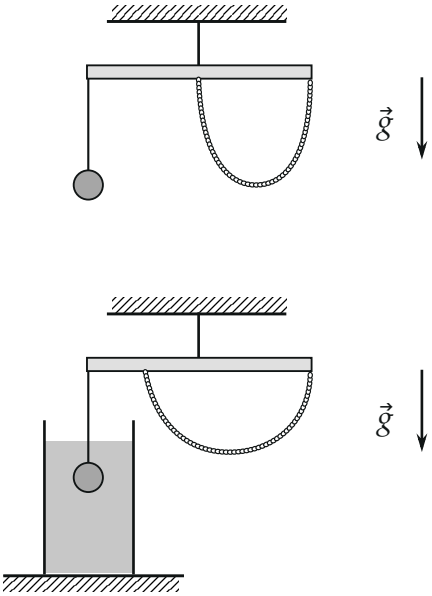
Линейка с грузом и цепочкой

Задача 2. [МОШ 2015/16, 8 класс, задача 2] Однородная линейка подвешена к потолку на нити, привязанной к середине линейки. К линейке прикреплены груз и однородная цепочка так, как показано на первом рисунке. При этом линейка горизонтальна и находится в равновесии. Затем груз полностью погрузили в воду так, что он не касался дна и стенок стакана. Для того, чтобы сохранить равновесие системы, пришлось переместить точку прикрепления к линейке одного из концов цепочки на $1/4$ длины линейки — как показано на втором рисунке. Какова средняя плотность материала, из которого сделан груз?



▲ **Решение.** **Что происходит.** Линейка с нитью в середине — рычаг с осью в точке подвеса O. Вес самой линейки приложен в O и момента не создаёт. Равновесие рычага — равенство моментов сил, которые на него действуют: слева шарик, справа цепочка. Ключевой факт задачи: цепочка действует на линейку двумя вертикальными силами по половине её веса, независимо от того, как она провисает. При погружении

сила натяжения нити шарика уменьшается на силу Архимеда, поэтому левый момент падает; чтобы это скомпенсировать, конец цепочки передвигают влево, к шарику.

Обозначения. L — длина линейки; m — масса груза; V — его объём; m_c — масса цепочки; ρ — средняя плотность груза, $\rho_в = 1000$ кг/м^3 — плотность воды. Ось — точка O в середине линейки; моменты сил относительно O считаем положительными, если они вращают линейку против часовой стрелки (левый конец вниз).

1. Что делает цепочка с линейкой. Концы цепочки закреплены на линейке на одной высоте, а сама цепочка однородна и висит симметрично относительно вертикали, проходящей через середину между точками крепления. Значит, симметричны и силы, которые линейка действует на цепочку: вертикальные составляющие этих сил равны, а их сумма уравновешивает вес цепочки $m_c g$. Каждый конец цепочки тянет линейку вниз с силой

$$F_c = \frac{m_c g}{2}.$$

Горизонтальные составляющие сил натяжения цепочки направлены вдоль линейки, а линия линейки проходит через ось O, поэтому момента относительно O они не дают.

Обратите внимание: сила $m_c g/2$ на каждый конец не зависит ни от формы провисания, ни от расстояния между точками крепления — достаточно равной высоты концов и однородности цепочки. Поэтому после сдвига левого конца цепочки каждая из двух сил по-прежнему равна $m_c g/2$, меняется только место приложения левой.

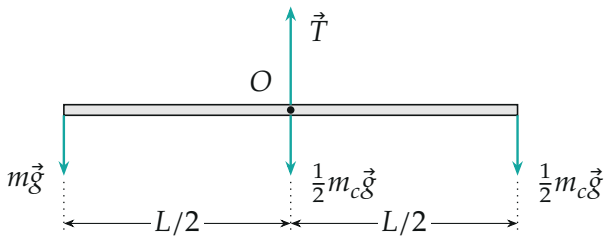


Рис. 2. Силы, действующие на линейку в воздухе (стрелка $\vec{T}$ укорочена, остальные в масштабе при $m = m_c/2$)

2. Равновесие в воздухе. Шарик тянет левый конец вниз силой mg (нить невесома, шарик покоится), плечо $L/2$. Правый конец цепочки тянет вниз силой $m_c g/2$ с плечом $L/2$ в другую сторону, левый конец цепочки приложен в точке O — его плечо равно нулю. Условие равновесия линейки — сумма моментов относительно O равна нулю:

$$mg \cdot \frac{L}{2} - \frac{m_c g}{2} \cdot \frac{L}{2} = 0 \quad \Longrightarrow \quad m = \frac{m_c}{2}. \tag{1}$$

3. Равновесие в воде. Шарик покоится в воде: сила натяжения нити T_1 и сила Архимеда $F_A = \rho_в g V$ уравновешивают вес, $T_1 = mg - \rho_в g V$. Нить действует на линейку с такой же силой T_1 вниз, плечо $L/2$ по-прежнему. Левый конец цепочки теперь на расстоянии $L/4$ слева от O, а правый — по-прежнему на $L/2$ справа. Сумма моментов относительно O:

$$(mg - \rho_в g V)\frac{L}{2} + \frac{m_c g}{2} \cdot \frac{L}{4} - \frac{m_c g}{2} \cdot \frac{L}{2} = 0.$$

Сократим на $gL/2$ и воспользуемся (1):

$$m - \rho_в V - \frac{m_c}{4} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \rho_в V = m - \frac{m_c}{4} = m - \frac{m}{2} = \frac{m}{2}. \tag{2}$$

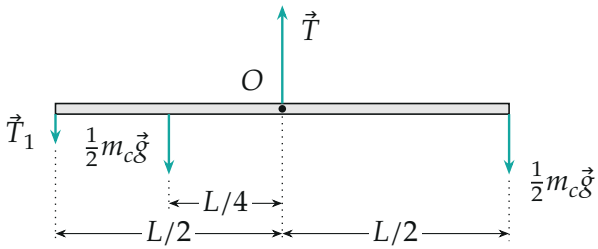


Рис. 3. Силы на линейку после погружения груза: $T_1 = mg - F_A$, левый конец цепочки сдвинут на $L/4$ влево (стрелка $\vec{T}$ укорочена, остальные в масштабе)

4. Плотность груза. Плотность груза $\rho = m/V$. Разделим m на V с помощью (2): $\rho_в V = m/2$, значит

$$\rho = \frac{m}{V} = 2\rho_в = 2000 \text{ кг/м}^3.$$

Проверка. Второй способ: вычтем равенства моментов в воздухе и в воде. Сила Архимеда убрала момент $F_A \cdot \frac{L}{2}$ слева, а сдвиг конца цепочки добавил слева момент $\frac{m_c g}{2} \cdot \frac{L}{4}$; новое равновесие возможно, только если они равны: $F_A \cdot \frac{L}{2} = \frac{m_c g L}{8}$, то есть $F_A = \frac{m_c g}{4} = \frac{mg}{2}$ по (1) — та же связь $\rho_в V = m/2$. Числами: пусть $L = 6$, $m_c g = 4$, $mg = 2$ (условные единицы). В воздухе: $2 \cdot 3 - 2 \cdot 3 = 0$. В воде $T_1 = 2 - 1 = 1$: $1 \cdot 3 + 2 \cdot 1{,}5 - 2 \cdot 3 = 0$. Предел: если бы груз был легче воды, было бы $F_A > mg$, и груз всплывал бы, а нить обвисла; у нас $F_A = mg/2 < mg$, груз тонет и нить натянута, как в условии. Физический смысл: плотность груза вдвое больше плотности воды — он на 50% легче в воде, чем в воздухе.

Ответ. $\rho_{\text{груза}} = 2\rho_в = 2000$ кг/м^3.