Кастрюли, плитки и кипятильник

Задача 3. [МОШ 2015/16, 8 класс, задача 3] На кухне стоят две включенные (прогревшиеся) электроплитки мощностями 1 кВт и 2 кВт, а также есть один кипятильник мощностью 0,5 кВт (время его прогревания мало). Хозяйка заполняет водой три кастрюли, налив в них 1, 2 и 3 литра воды, соответственно, и планирует как можно быстрее получить 6 литров кипятка. Начальная температура воды во всех кастрюлях одинакова и равна +20 °C. Удельная теплоёмкость воды 4200 Дж/(кг·°C). Чему равно минимальное время, необходимое для получения кипятка? Опишите одну из возможных процедур манипуляций с кастрюлями, плитками и кипятильником, при которой это рекордное время достигается. Считайте, что вся теплота передаётся только воде. Временами, которые хозяйка тратит на перестановку кастрюль и перемещение кипятильника, можно пренебречь.

▲ **Решение. Что происходит.** Три нагревателя суммарно дают $0{,}5 + 1 + 2 = 3{,}5$ кВт, а нагреть надо 6 л воды от 20 до 100 °C. Это задача на баланс энергии: вся теплота идёт только воде, поэтому время не может быть меньше, чем нужная теплота, делённая на суммарную мощность. Затем нужно показать, что этот предел достижим: распределить нагреватели между кастрюлями так, чтобы ни один не простаивал и все кастрюли закипели в один момент.

Обозначения. $c = 4200$ Дж/(кг·°C); $m_1 = 1$ кг, $m_2 = 2$ кг, $m_3 = 3$ кг — массы воды (плотность воды 1000 кг/м^3, значит 1 л = 1 кг); $\Delta t = 100 - 20 = 80$ °C — на сколько надо нагреть воду; $P_\Sigma = 3{,}5$ кВт — суммарная мощность; τ — время до того, как закипит вся вода.

1. Нижняя оценка времени. Теплота, необходимая, чтобы довести всю воду до кипения:

$$Q = c\,(m_1 + m_2 + m_3)\,\Delta t = 4200 \cdot 6 \cdot 80 = 2{,}016 \cdot 10^6 \text{ Дж}.$$

За время τ нагреватели отдают воде не больше $P_\Sigma \tau$ (если все работают

непрерывно и вся теплота идёт на нагрев). Поэтому $P_\Sigma \tau \geq Q$ и

$$\tau \geq \frac{Q}{P_\Sigma} = \frac{2{,}016 \cdot 10^6}{3500} = 576 \text{ с} = 9 \text{ мин } 36 \text{ с}.$$

Равенство возможно, только если все три нагревателя работают непрерывно до самого конца и вода во всех кастрюлях закипает одновременно: если одна кастрюля закипела раньше, её нагреватель дальше греет воду выше 100 °C (кипение — потеря теплоты) или простаивает, и энергия впустую тратится.

2. Как достичь предела. Скорость нагрева воды в кастрюле равна $\frac{dt}{d\tau} = \frac{P}{cm}$: чем мощнее нагреватель и чем меньше воды, тем быстрее она греется. Поэтому важно, какой нагреватель стоит под какой кастрюлей. Разобьём время на два промежутка, t_1 и t_2, $t_1 + t_2 = \tau = 576$ с, и в каждом из них отдадим каждой кастрюле свой нагреватель:

	промежуток t_1	промежуток t_2
1 л	плитка 1 кВт	кипятильник 0,5 кВт
2 л	плитка 2 кВт	плитка 1 кВт
3 л	кипятильник 0,5 кВт	плитка 2 кВт

Идея выбора: в первый промежуток 1 л и 2 л нагреваются в одинаковом темпе ($1000/(c \cdot 1) = 2000/(c \cdot 2)$), а 3 л греются медленно, зато во втором промежутке получают самую мощную плитку.

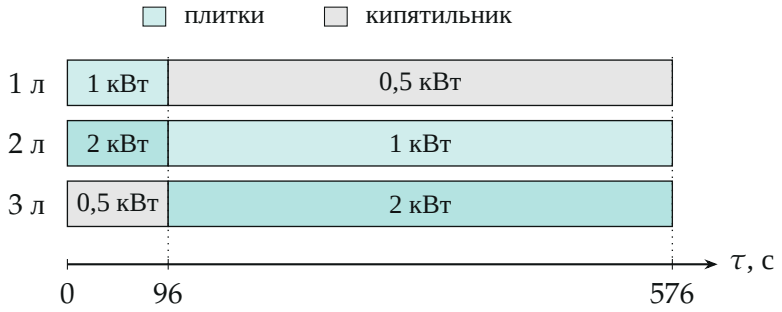


Рис. 1. Какой нагреватель под какой кастрюлей (плитки — бирюзовым, чем темнее, тем мощнее)

3. Длины промежутков. Каждая кастрюля получает теплоту Pt от своих нагревателей и должна набрать $c\,m_k\Delta t$. Выразим нужную теплоту в кДж: $c\Delta t = 336$ кДж/кг, поэтому кастрюли требуют 336, 672 и 1008 кДж. Запишем для каждой кастрюли, что полученная теплота равна нужной (время — в секундах, мощность — в кВт, получится кДж):

$$\begin{aligned} 1\text{ л}: &\quad 1\cdot t_1 + 0{,}5\,t_2 = 336,\\ 2\text{ л}: &\quad 2\cdot t_1 + 1\cdot t_2 = 672,\\ 3\text{ л}: &\quad 0{,}5\,t_1 + 2\,t_2 = 1008. \end{aligned}$$

Второе уравнение — первое, умноженное на 2, поэтому независимых уравнений два; к ним добавляется $t_1 + t_2 = 576$. Подставим $t_2 = 576 - t_1$ в первое: $t_1 + 288 - 0{,}5t_1 = 336$, откуда $0{,}5\,t_1 = 48$ и

$$t_1 = 96\text{ с}, \qquad t_2 = 576 - 96 = 480\text{ с}.$$

Третье уравнение выполнено само: $0{,}5\cdot 96 + 2\cdot 480 = 48 + 960 = 1008$ (сумма трёх уравнений есть $3{,}5\cdot 576 = 2016$).

4. Ход температур. Скорость нагрева $\dfrac{P}{cm}$ в каждый промежуток разная:

	промежуток t_1, °C/с	промежуток t_2, °C/с
1 л	$1000/4200 \approx 0{,}238$	$500/4200 \approx 0{,}119$
2 л	$2000/8400 \approx 0{,}238$	$1000/8400 \approx 0{,}119$
3 л	$500/12600 \approx 0{,}040$	$2000/12600 \approx 0{,}159$

Температуры в момент 96 с: $20 + 0{,}238\cdot 96 \approx 42{,}9$ °C у 1 л и 2 л, $20 + 0{,}040\cdot 96 \approx 23{,}8$ °C у 3 л. К 576 с: у 1 л и 2 л $42{,}9 + 0{,}119\cdot 480 = 100$ °C; у 3 л $23{,}8 + 0{,}159\cdot 480 = 100$ °C. Все три кастрюли закипают одновременно.

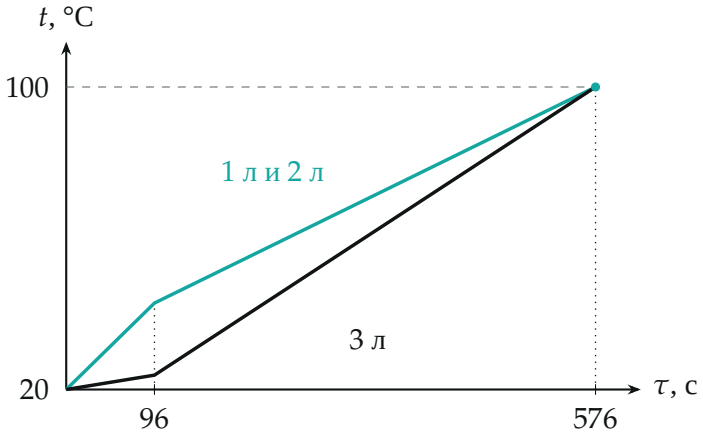


Рис. 2. Температуры воды: кривые 1 л и 2 л совпадают, все линии приходят в 100 °C в момент 576 с

Обратите внимание: рекордное время определено однозначно, а способ его достичь — нет. Годится любая схема, где нагреватели не простаивают, вода закипает у всех одновременно, и (это проверяют расчётом, как в пункте 3) каждая кастрюля получает ровно $c\,m_k\Delta t$.

Проверка. Суммарная энергия: $0{,}5\cdot 576 + 1\cdot 576 + 2\cdot 576 = 2016$ кДж $= Q$ — нагреватели отдали ровно столько, сколько нужно. Размерность: Вт·с = Дж. Нижняя оценка достигнута, так что быстрее нельзя: в любой схеме $P_\Sigma \tau \geq Q$. Смысл: вся мощность дома работает на воду без простоев, поэтому время определяется только энергетическим балансом.

Ответ. Минимальное время $\tau = c\,(m_1 + m_2 + m_3)\,\Delta t / P_\Sigma = 576$ с = 9 мин 36 с. Одна из процедур: первые $t_1 = 96$ с — 1 л на плитке 1 кВт, 2 л на плитке 2 кВт, 3 л с кипятильником; затем $t_2 = 480$ с — 1 л с кипятильником, 2 л на плитке 1 кВт, 3 л на плитке 2 кВт.