Составная проволока при нагреве

Задача 4. [МОШ 2015/16, 8 класс, задача 4] Два длинных куска проволоки изготовлены из разных металлов A и B. В первом опыте от проволоки из металла A отрезали кусок длиной l_1 и нагрели его, увеличив его температуру на величину Δt_1. При этом длина куска увеличилась на Δl_1. Во втором опыте от проволоки из металла B отрезали кусок длиной l_2 и нагрели его, увеличив его температуру на величину Δt_2, и длина этого куска увеличилась на Δl_2. В третьем опыте от проволоки из металла A отрезали кусок длиной a, а от проволоки из металла B отрезали кусок длиной b, и соединили эти куски друг с другом последовательно. На сколько нужно нагреть получившийся составной кусок проволоки для того, чтобы его длина увеличилась на ΔL? Считайте, что для обоих металлов выполняется линейный закон теплового расширения, при котором относительное увеличение длины каждого куска проволоки пропорционально абсолютному увеличению его температуры.

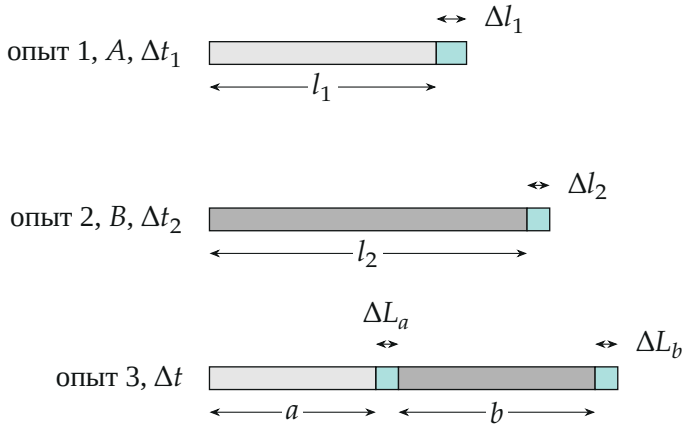


Рис. 1. Три опыта: серое — металл A, тёмно-серое — металл B, бирюзовым — удлинение при нагреве (на рисунке увеличено)

▲ **Решение. Что происходит.** Линейный закон теплового расширения: относительное удлинение куска пропорционально изменению его температуры, $\dfrac{\Delta l}{l} = \alpha\,\Delta t$. Число α — коэффициент линейного расширения —

зависит от металла, но не от длины куска и не от того, на сколько нагрели. Поэтому первые два опыта нужны, чтобы найти α_A и α_B, а в третьем опыте оба куска греются на одно и то же Δt и удлиняются каждый по своему закону. Куски соединены последовательно, поэтому удлинение составного куска равно сумме удлинений его частей.

Обозначения. α_A, α_B — коэффициенты линейного расширения металлов A и B; Δt — искомое повышение температуры составного куска (одно для обеих частей); ΔL_a, ΔL_b — удлинения частей a и b, $\Delta L = \Delta L_a + \Delta L_b$.

1. Коэффициенты расширения из первых опытов. Запишем закон для каждого из двух кусков и выразим α:

$$\frac{\Delta l_1}{l_1} = \alpha_A \Delta t_1 \implies \alpha_A = \frac{\Delta l_1}{l_1 \Delta t_1}, \qquad \frac{\Delta l_2}{l_2} = \alpha_B \Delta t_2 \implies \alpha_B = \frac{\Delta l_2}{l_2 \Delta t_2}.$$

Эти числа остаются верными для любого куска той же проволоки, любой длины: именно поэтому их можно перенести в третий опыт.

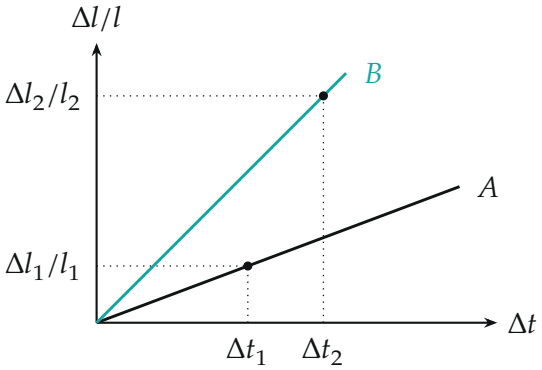


Рис. 2. Закон $\Delta l/l = \alpha \Delta t$ для каждого металла — прямая; наклон прямой есть α (по точкам, найденным в опытах 1 и 2)

2. Удлинение частей составного куска. Нагреваем кусок на Δt; каждая часть удлиняется по закону своего металла:

$$\Delta L_a = \alpha_A a \Delta t, \qquad \Delta L_b = \alpha_B b \Delta t.$$

Куски соединены концом к концу, поэтому полное удлинение — сумма:

$$\Delta L = \Delta L_a + \Delta L_b = (\alpha_A\, a + \alpha_B\, b)\,\Delta t.$$

3. Искомое повышение температуры. Выразим Δt и подставим α_A, α_B:

$$\Delta t = \frac{\Delta L}{\alpha_A a + \alpha_B b} = \frac{\Delta L}{\dfrac{a\,\Delta l_1}{l_1\,\Delta t_1} + \dfrac{b\,\Delta l_2}{l_2\,\Delta t_2}}.$$

Обратите внимание: удлинение ΔL — это удлинение *всего* составного куска, а не одной его части. Складываются именно удлинения частей, а не температуры или относительные удлинения.

Проверка. Размерность: α измеряется в $1/°\mathrm{C}$; αa — в м/°C; отношение $\Delta L/(\alpha a)$ — в °C. Предел: если металлы одинаковы ($\alpha_A = \alpha_B = \alpha$), то $\Delta t = \Delta L/(\alpha(a+b))$ — закон расширения для одного куска длиной $a+b$; при $b \to 0$ получаем $\Delta t = \Delta L/(\alpha_A a)$ — закон для куска из одного металла. Числами (условный пример): $l_1 = 1$ м, $\Delta t_1 = 50$ °C, $\Delta l_1 = 0{,}6$ мм дают $\alpha_A = 1{,}2 \cdot 10^{-5}$ °C^{-1}; $l_2 = 2$ м, $\Delta t_2 = 40$ °C, $\Delta l_2 = 1{,}52$ мм — $\alpha_B = 1{,}9 \cdot 10^{-5}$ °C^{-1}; при $a = 0{,}5$ м, $b = 1{,}5$ м и $\Delta L = 1$ мм формула даёт $\Delta t = 10^{-3}/(6 \cdot 10^{-6} + 2{,}85 \cdot 10^{-5}) \approx 29$ °C. Проверяем напрямую при $\Delta t = 28{,}99$ °C: $\alpha_A a \Delta t = 0{,}17$ мм, $\alpha_B b \Delta t = 0{,}83$ мм — сумма 1,00 мм, как и задано. Физический смысл: оба металла греются вместе, поэтому нужная температура меньше, чем если бы вся проволока была из менее расширяющегося металла, и больше, чем из более расширяющегося.

Ответ. $\Delta t = \dfrac{\Delta L}{\dfrac{a\,\Delta l_1}{l_1\,\Delta t_1} + \dfrac{b\,\Delta l_2}{l_2\,\Delta t_2}}.$