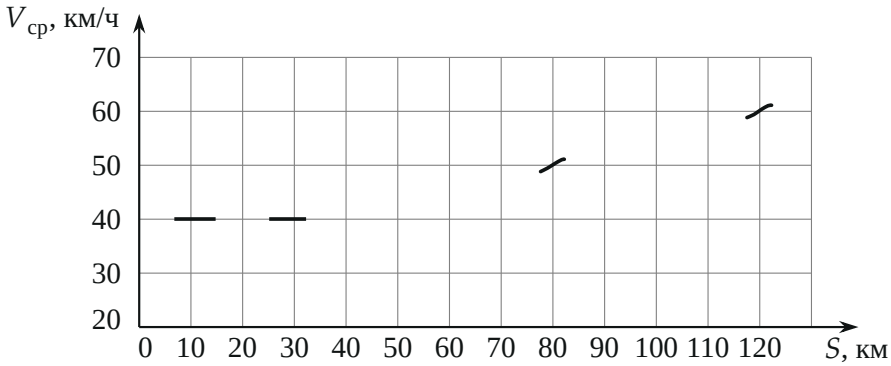
График средней скорости автомобиля

Задача 5. [МОШ 2015/16, 8 класс, задача 5] Автомобиль часть пути ехал с постоянной скоростью V_1 по грунтовой дороге, а затем, выехав на хороший асфальт, поехал быстрее с другой постоянной скоростью V_2. На рисунке приведен график зависимости **средней** скорости $V_{ср}$ автомобиля от пройденного им пути S. К сожалению, большая часть графика от времени выцвела, и на нем остались лишь отдельные фрагменты. Определите значения скоростей V_1 и V_2. Сколько времени длилось движение по грунтовой дороге? Какого значения достигла средняя скорость автомобиля к сотому километру пути?



▲ **Решение. Что происходит.** Средняя скорость к моменту, когда пройден путь S, равна $V_{ср} = S/T(S)$, где $T(S)$ — всё время от старта. Пока машина едет по грунту, она всё время едет с V_1, поэтому $V_{ср} = V_1$: на графике горизонтальный участок. После выезда на асфальт средняя скорость растёт, но медленно: старое медленное время остаётся в знаменателе. Главная идея: сам график $V_{ср}(S)$ кривой, а график времени $T(S) = S/V_{ср}$ состоит из двух отрезков прямых — для каждой дороги время набегает с постоянной скоростью $1/V$ часов на километр. Прямые строить и считать проще.

Обозначения. S_0 — длина грунтового участка; $t_0 = S_0/V_1$ — время на нём; $T(S)$ — время от старта до пути S. Скорости — в км/ч, пути — в км, время — в часах.

1. Скорость V_1. На грунте $T(S) = S/V_1$ и $V_{\text{ср}} = V_1$. Два сохранившихся горизонтальных фрагмента (около $S \approx 10$ и $S \approx 30$ км) лежат на уровне 40 км/ч, значит

$$V_1 = 40 \text{ км/ч}.$$

2. Два сохранившихся наклонных фрагмента. У них $V_{\text{ср}} > V_1$, значит, автомобиль уже выехал на асфальт ($S_0 < 78$ км). Считаем по клеткам графика: первый фрагмент проходит через точку $S = 80$ км, $V_{\text{ср}} = 50$ км/ч, второй — через $S = 120$ км, $V_{\text{ср}} = 60$ км/ч. Время до этих точек:

$$T(80) = \frac{80}{50} = 1{,}6 \text{ ч}, \qquad T(120) = \frac{120}{60} = 2{,}0 \text{ ч}.$$

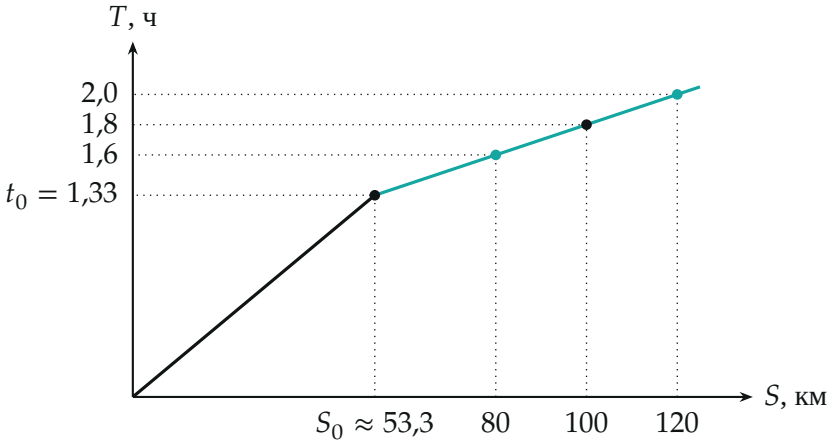


Рис. 1. Время в пути $T(S) = S/V_{ср}$ — ломаная из двух прямых; чёрный отрезок — грунт (наклон $1/V_1$), бирюзовый — асфальт (наклон $1/V_2$); бирюзовые точки найдены по фрагментам графика

3. Скорость V_2. Обе точки лежат на асфальте, где $T(S) = t_0 + (S - S_0)/V_2$. Вычтем одно из другого — t_0 и S_0 уйдут:

$$T(120) - T(80) = \frac{120 - 80}{V_2} \implies V_2 = \frac{40}{0{,}4} = 100 \text{ км/ч}.$$

4. Длина грунта и время на нём. Запишем $T(80)$ через S_0: на грунте S_0 километров со скоростью V_1, на асфальте оставшиеся $80 - S_0$ со скоростью V_2:

$$\frac{S_0}{V_1} + \frac{80 - S_0}{V_2} = 1{,}6 \implies \frac{S_0}{40} + \frac{80 - S_0}{100} = 1{,}6 \implies 0{,}015\,S_0 = 0{,}8.$$

Отсюда $S_0 = \dfrac{160}{3} \approx 53{,}3$ км (действительно меньше 78 км и больше 32 км — последнего сохранившегося фрагмента на грунте) и

$$t_0 = \frac{S_0}{V_1} = \frac{160/3}{40} = \frac{4}{3}\text{ ч} = 1\text{ ч }20\text{ мин}.$$

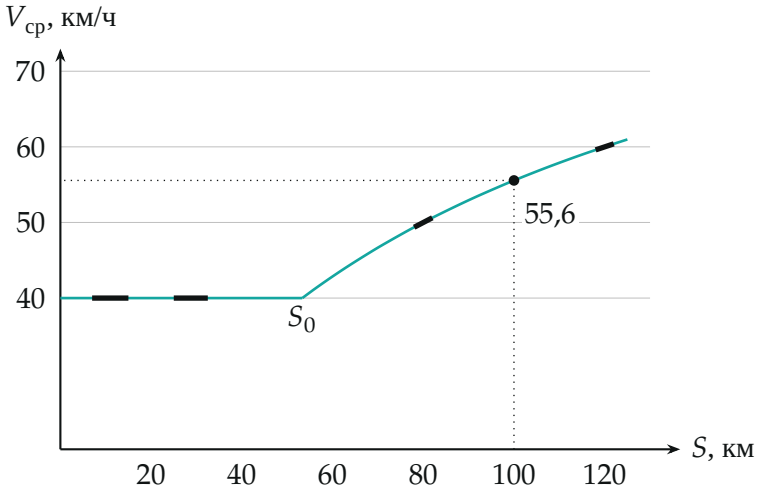


Рис. 2. Восстановленный график $V_{ср}(S)$: чёрным — сохранившиеся фрагменты, бирюзовым — то, что мы вычислили; точка — $S = 100$ км

5. Средняя скорость к сотому километру. Время до $S = 100$ км: грунт $t_0 = \frac{4}{3}$ ч и $100 - \frac{160}{3} = \frac{140}{3}$ км асфальта со скоростью 100 км/ч:

$$T(100) = \frac{4}{3} + \frac{140/3}{100} = \frac{4}{3} + \frac{7}{15} = \frac{27}{15} = 1{,}8\text{ ч},$$

$$V_{\text{ср}}(100) = \frac{100}{1{,}8} = \frac{500}{9} \approx 55{,}6 \text{ км/ч}.$$

Обратите внимание: ответ не 55 км/ч. Соблазн взять среднее арифметическое $\frac{50+60}{2}$, потому что $S = 100$ лежит посередине между 80 и 120, неверен: линейна не $V_{\text{ср}}(S)$, а время $T(S)$. Поэтому посередине берём время: $T(100) = \frac{1{,}6+2{,}0}{2} = 1{,}8$ ч — это второй способ, он совпал с пунктом 5.

Проверка. Подставим найденные $V_1 = 40$, $V_2 = 100$, $S_0 = \frac{160}{3}$ в $V_{\text{ср}}(S) = S/(0{,}8 + S/100)$ при $S > S_0$: $S = 80$ даёт $80/1{,}6 = 50$, $S = 120$ даёт $120/2 = 60$ — оба значения совпадают с графиком. В точке S_0 формула даёт $53{,}3/1{,}333 = 40$ — график непрерывен. Предел $S \to \infty$: $V_{\text{ср}} \to V_2 = 100$ км/ч — средняя скорость стремится к скорости на асфальте, но никогда её не достигает. Размерность: км/ч. Физический смысл: средняя скорость — не среднее значений скорости, а полный путь на полное время; потому и график искривлён.

Ответ. $V_1 = 40$ км/ч, $V_2 = 100$ км/ч; по грунту автомобиль ехал 1 ч 20 мин (длина грунта $\approx 53{,}3$ км); средняя скорость к сотому километру $\approx 55{,}6$ км/ч (не 55 км/ч).