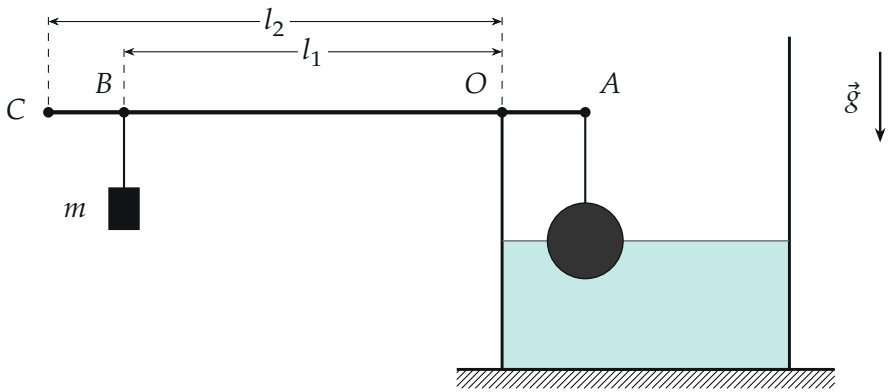
Стержень и шарик в воде

Задача 6. [МОШ 2015/16, 8 класс, задача 6] К правому концу A стержня, масса которого пренебрежимо мала, подвесили на тонкой нити алюминиевый шарик. Стержень положили на край сосуда с водой (как показано на рисунке), а к точке B, находящейся на расстоянии $l_1 = 50$ см слева от точки опоры O, подвесили груз такой массой m, что шарик оказался погруженным в воду на половину своего объёма. На какую часть своего объёма окажется погруженным в воду этот шарик, если груз m перевесить из точки B в точку C, находящуюся на расстоянии $l_2 = 60$ см слева от точки O? Плотность алюминия $\rho_а = 2700$ кг/м^3, плотность воды $\rho_в = 1000$ кг/м^3.



▲ **Решение.** **Что происходит.** Стержень без массы, лежащий на краю сосуда, — рычаг с осью в точке O. Слева он нагружен грузом m, справа — шариком, который висит на нити в воде. Шарик тянет стержень не всем своим весом, а весом минус сила Архимеда: чем меньше шарик погружён, тем сильнее он тянет вниз. Когда груз переносят дальше от оси, его момент растёт, и равновесие возможно, только если вырастет момент шарика, то есть шарик должен всплыть повыше и погрузиться меньше. Главная идея: записать правило моментов относительно O дважды (до и после перестановки груза) и разделить уравнения — неизвестные масса груза, длина OA и объём шарика сократятся.

Обозначения. V — объём шарика; $d = OA$ — плечо шарика; α — искомая доля объёма шарика, погружённая в воду во втором случае (в первом $\alpha_1 = \frac{1}{2}$); N — сила, с которой нить шарика тянет стержень вниз (в первом случае N_1, во втором N_2). Моменты считаем относительно точки O.

1. Сила, с которой шарик тянет стержень. Шарик покоится: вес $\rho_а Vg$ вниз, сила Архимеда $\rho_в \alpha Vg$ вверх (вытесненный объём воды равен погружённой части αV), сила натяжения нити вверх, равная N по третьему закону Ньютона. Нить невесома, поэтому она передаёт силу целиком. Второй закон Ньютона для шарика в проекции на вертикаль:

$$N = \rho_а Vg - \rho_в \alpha Vg = (\rho_а - \alpha\rho_в)Vg.$$

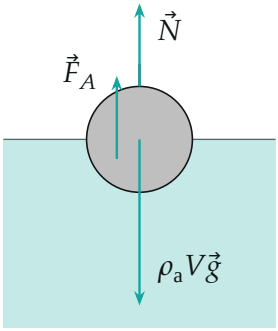


Рис. 2. Силы на шарик в воде (шарик погружён наполовину): $N + F_A = \rho_a Vg$

2. Положение груза в точке B**.** Груз висит неподвижно, поэтому нить тянет стержень вниз с силой mg на расстоянии l_1 от O. Правило моментов для стержня относительно O: момент груза, вращающий стержень левым концом вниз, равен моменту шарика, вращающему правым концом вниз. Масса стержня равна нулю, и его собственный вес момента не создаёт; реакция опоры приложена в O и тоже момента не создаёт. При $\alpha_1 = \frac{1}{2}$:

$$mg\,l_1 = N_1\,d = \Big(\rho_а - \frac{\rho_в}{2}\Big)Vg\,d. \qquad (1)$$

3. Положение груза в точке C**.** Тот же груз на расстоянии l_2, шарик

погружён на долю α:

$$mg\,l_2 = N_2\,d = (\rho_а - \alpha\rho_в)Vg\,d. \qquad (2)$$

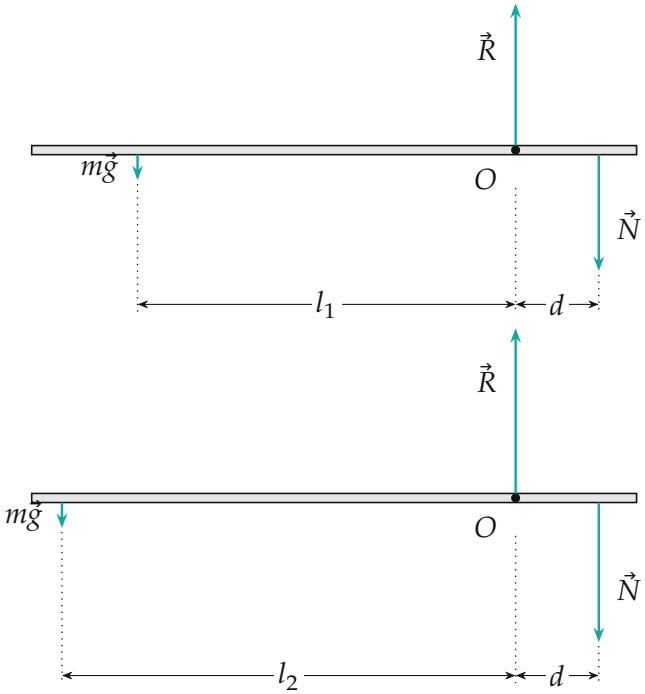


Рис. 3. Силы на стержень: вверху — груз в точке B (шарик погружён наполовину), внизу — в точке C ($\alpha = 0{,}06$). Стрелки в масштабе; $\vec{R}$ — реакция опоры

4. Делим уравнения. Поделим (2) на (1): m, g, V и d сокращаются,

$$\frac{l_2}{l_1} = \frac{\rho_а - \alpha\rho_в}{\rho_а - \rho_в/2} \implies \alpha\rho_в = \rho_а - \frac{l_2}{l_1}\Big(\rho_а - \frac{\rho_в}{2}\Big).$$

Разделим на $\rho_в$ и подставим числа ($\rho_а/\rho_в = 2{,}7$, $l_2/l_1 = 1{,}2$):

$$\alpha = \frac{\rho_а}{\rho_в} - \frac{l_2}{l_1}\Big(\frac{\rho_а}{\rho_в} - \frac{1}{2}\Big) = 2{,}7 - 1{,}2 \cdot 2{,}2 = 2{,}7 - 2{,}64 = 0{,}06.$$

Обратите внимание: ответ $\alpha = 0{,}06$ имеет смысл, только если он лежит между 0 и $\frac{1}{2}$. Проверим: чтобы шарик вышел из воды совсем ($\alpha = 0$), груз надо поставить на расстояние $l_1\rho_а/(\rho_а - \rho_в/2) = 50 \cdot 2{,}7/2{,}2 \approx 61{,}4$ см; наша точка C на 60 см ближе, значит, шарик остаётся в воде, и $0 < \alpha < \frac{1}{2}$. Будь l_2 больше 61,4 см, формула дала бы $\alpha < 0$, а на деле шарик просто вышел бы из воды и стержень повис бы на нём целиком.

Обратите внимание: на деле стержень при перестановке груза чуть наклонится (шарик поднимется). Но оба плеча при повороте вокруг O умножаются на один и тот же $\cos\varphi$, и в (1) и (2) он сокращается; поэтому формула верна и для наклонного стержня.

Проверка. Размерность: α — отношение объёмов, безразмерно. Предел $l_2 = l_1$: $\alpha = \frac{1}{2}$ — груз на старом месте, шарик погружён по-прежнему наполовину. Условие $l_2 > l_1$ даёт $\alpha < \frac{1}{2}$: груз дальше от оси — шарик погружён меньше, как мы и ожидали по смыслу. Числами: $N_1 \propto 2{,}7 - 0{,}5 = 2{,}2$; $N_2 \propto 2{,}7 - 0{,}06 = 2{,}64$; отношение $2{,}64/2{,}2 = 1{,}2 = l_2/l_1$, как требует правило рычага. Физический смысл: у шарика с нитью можно подбирать не только положение груза, но и степень погружения — рычаг сам выбирает такое погружение, при котором моменты равны.

Ответ. $\alpha = \dfrac{\rho_а}{\rho_в} - \dfrac{l_2}{l_1}\left(\dfrac{\rho_а}{\rho_в} - \dfrac{1}{2}\right) = 0{,}06$, то есть шарик погрузится на 6% своего объёма.