Стопка ледяных кирпичиков

Задача 7. [МОШ 2015/16, 8 класс, задача 7] Из четырёх одинаковых однородных ледяных кирпичиков длиной L каждый сложена симметричная стопка (см. рисунок). На какое максимальное расстояние x можно выдвинуть правый кирпичик, чтобы стопка не развалилась? Кирпичики очень гладкие.

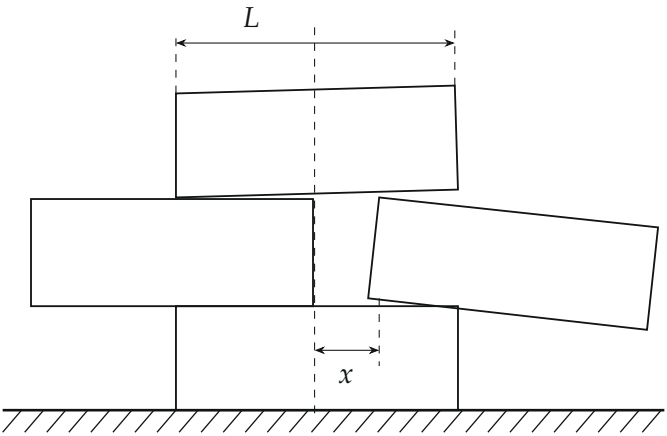


Рис. 1. Условие: симметричная стопка, правый средний кирпич выдвинут на x (показан момент, когда стопка начинает разваливаться)

▲ **Решение.** **Что происходит.** Нижний кирпич лежит на полу, на него опираются два средних, а на средние — верхний. Кирпичи гладкие, а поверхности горизонтальны, поэтому между кирпичами действуют только вертикальные силы, и стопка не может поехать — она может только опрокинуться. Опасен правый средний кирпич: его центр масс находится правее правого ребра нижнего кирпича, и он стремится повернуться вокруг этого ребра. Удерживает его верхний кирпич, который прижимает его слева от ребра. Главная идея: в предельном положении, когда стопка вот-вот развалится, записать правило моментов для верхнего и для правого кирпича и найти x.

Обозначения. m — масса одного кирпича; ось x горизонтальна, начало — на оси симметрии стопки (через середины нижнего и верхнего

кирпичей). Нижний и верхний кирпичи занимают $-L/2 \le x \le L/2$, левый средний — $[-L, 0]$, правый средний — $[x, x+L]$, где x — искомое смещение. N_L и N_R — силы, с которыми левый и правый средние кирпичи давят на верхний снизу (верхний давит на них вниз с такими же по модулю силами, третий закон Ньютона); N_2 — сила, с которой нижний кирпич давит на правый снизу; P — правое ребро нижнего кирпича, точка $L/2$.

1. Где могут быть приложены силы. Правый кирпич лежит на нижнем и под верхним на отрезке $[x, L/2]$: правее $L/2$ нижнего кирпича нет, левее x нет самого правого. Верхний кирпич опирается на левый средний на отрезке $[-L/2, 0]$ и на правый на отрезке $[x, L/2]$. Значит, точка приложения N_R — $p_R \in [x, L/2]$, точка приложения N_L — $p_L \in [-L/2, 0]$. Заранее неизвестно, где именно; ниже мы выберем самый невыгодный для стопки случай.

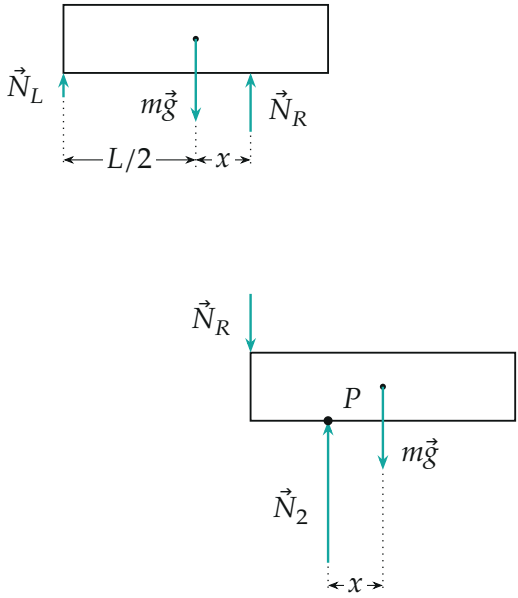


Рис. 2. Силы на верхний кирпич (вверху) и на правый средний (внизу) в предельном положении; стрелки в масштабе, пунктиры — плечи. Остальные кирпичи не показаны

2. Равновесие верхнего кирпича. На верхний кирпич действуют вес mg в его середине (точка 0) и силы N_L, N_R снизу. Равны нулю сумма вертикальных сил и сумма моментов относительно середины:

$$N_L + N_R = mg, \qquad N_R\, p_R = N_L\, |p_L|.$$

Правый кирпич удерживается тем лучше, чем больше N_R. Из этих двух уравнений $N_R = \dfrac{|p_L|}{p_R + |p_L|}\, mg$; это тем больше, чем больше $|p_L|$ и чем меньше p_R. Наибольшее значение достигается при $|p_L| = L/2$ и $p_R = x$:

$$N_R = \frac{L/2}{x + L/2}\, mg = \frac{L}{2x + L}\, mg. \tag{1}$$

Это наибольшая прижимающая сила, которую верхний кирпич может создать; её и берём для предельного положения.

3. Равновесие правого кирпича. Правый кирпич вот-вот повернётся вокруг ребра P: нижний кирпич держит его только в самой точке P, поэтому N_2 приложена в P и момента относительно P не даёт (ось выбрана так, чтобы неизвестная N_2 не вошла в уравнение). Момент веса относительно P стремится повернуть кирпич вниз направо; его плечо равно x, потому что центр масс правого кирпича находится в точке $x + L/2$. Момент силы N_R, приложенной в точке x (плечо $L/2 - x$), удерживает кирпич. Условие предельного равновесия:

$$mg \cdot x = N_R\Big(\frac{L}{2} - x\Big). \tag{2}$$

Пока $mg\,x < N_R(L/2 - x)$, кирпич прижат и стоит; если выдвигать дальше, момент веса растёт, а удерживающий момент падает (и плечо $L/2 - x$, и N_R из (1) уменьшаются), и равенство нарушается.

4. Квадратное уравнение. Подставим (1) в (2) и сократим на mg:

$$x = \frac{L}{2x + L}\Big(\frac{L}{2} - x\Big) \implies x(2x + L) = \frac{L^2}{2} - Lx \implies x^2 + Lx - \frac{L^2}{4} = 0.$$

Дискриминант $L^2 + L^2 = 2L^2$, корни $x = \dfrac{-L \pm \sqrt{2}\,L}{2}$. Отрицательный корень не подходит: кирпич выдвигают вправо, $x > 0$. Остаётся

$$x_{\max} = \frac{\sqrt{2}-1}{2}\,L \approx 0{,}207\,L.$$

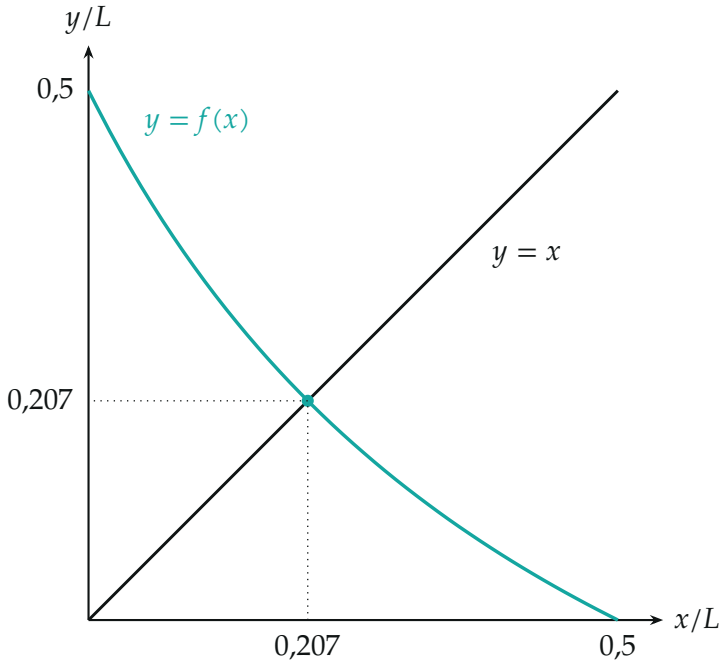


Рис. 3. Условие устойчивости правого кирпича $x \le f(x)$, где $f(x) = L\,(L/2-x)/(2x+L)$ (по осям отложены x/L и f/L). Кривая убывает, прямая $y = x$ растёт; их пересечение — предельное смещение

Рис. 3 показывает смысл ответа: левее точки пересечения прямая $y = x$ идёт ниже кривой — момент веса меньше удерживающего, стопка стоит; правее — наоборот.

Обратите внимание: другие кирпичи при таком x не падают. Центр масс левого среднего кирпича находится в точке $-L/2$ — ровно над левым ребром нижнего кирпича, и верхний кирпич давит на него в той

же точке; момент относительно этого ребра равен нулю, кирпич стоит. Нижний кирпич нагружен сверху симметрично и стоит на полу.

Проверка. Предел: без верхнего кирпича ($N_R = 0$) правый можно было бы выдвинуть лишь до $x = 0$ (центр масс над ребром); верхний кирпич прижимает, и $x > 0$, как должно быть. Второй способ: перебор на компьютере всех допустимых точек приложения сил и значений N_R даёт наибольшее $x \approx 0{,}2070\,L$ в согласии с $0{,}2071\,L$. Числами при $x = 0{,}2071\,L$: $N_R = Lmg/(2x + L) = 0{,}7071\,mg$, $N_L = 0{,}2929\,mg$; момент веса относительно P равен $0{,}2071\,mgL$, момент N_R равен $0{,}7071 \cdot 0{,}2929\,mgL = 0{,}2071\,mgL$ — равны. Физический смысл: верхний кирпич перекидывает часть своего веса на выдвинутый, поэтому его можно выдвинуть примерно на пятую часть длины.

Ответ. $x_{\max} = \dfrac{\sqrt{2}-1}{2}\,L \approx 0{,}21\,L.$