Остывание грузил в проруби

Задача 8. [МОШ 2015/16, 8 класс, задача 8] Папа решил взять с собой Васю на зимнюю рыбалку. В инвентаре папы оказалось два лишних свинцовых грузила одинаковой массой. Первое представляло собой кубик, а второе цилиндр, высота которого равна длине ребра кубика. К середине одной из граней кубика и к центру одного из оснований цилиндра были прикреплены маленькие крючки. В какой-то момент Васе стало скучно, и он начал экспериментировать с этими грузилами. Вася привязал к крючкам нитки, подвесил грузила за эти нитки, и заклеил верхние и нижние поверхности грузил изоляционной лентой, которая плохо проводит теплоту. После этого Вася нагрел на походной газовой горелке воду в миске, опустил в неё свинцовый кубик, дождался его полного прогревания до 80 °C, и после этого погрузил кубик в прорубь. Оказалось, что кубик охладился до температуры 36,6 °C за 30 секунд. Затем Вася нагрел тем же способом до той же температуры цилиндрическое грузило, и тоже погрузил его в прорубь. За какое время оно охладится до температуры 36,6 °C?

Справка: объём цилиндра равен произведению площади его основания на высоту.

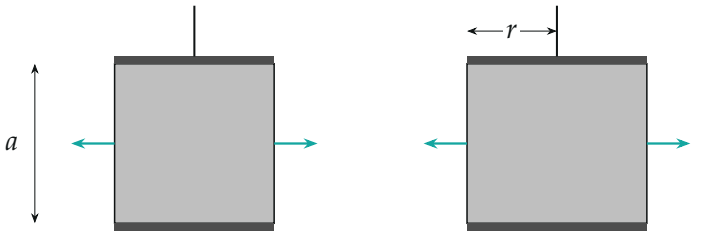


Рис. 1. Грузила: кубик с ребром a и цилиндр высотой a, у обоих верх и низ заклеены лентой (чёрные полосы); тепло уходит в воду через боковую поверхность (бирюзовые стрелки)

▲ **Решение. Что происходит.** Грузило, опущенное в прорубь, отдаёт теплоту воде через свою поверхность. Лента почти не проводит теплоту,

поэтому тепло уходит только через боковую поверхность. Чем больше боковая поверхность, тем быстрее идёт теплообмен. Масса и материал у грузил одинаковые, значит, одинакова и теплота, которую надо отдать, чтобы остыть с 80 до 36,6 °C. Поэтому главная идея: время остывания обратно пропорционально площади боковой поверхности, и задача сводится к сравнению двух площадей.

Обозначения. a — ребро кубика и высота цилиндра; r — радиус основания цилиндра; $A_к$, $A_ц$ — площади боковых поверхностей кубика и цилиндра (без лент); $t_к = 30$ с — время остывания кубика; $t_ц$ — искомое время цилиндра.

1. Связь размеров. Массы одинаковы и свинец один и тот же, поэтому одинаковы и объёмы. Объём кубика a^3, объём цилиндра — площадь основания, умноженная на высоту, то есть $\pi r^2 a$. Приравниваем:

$$\pi r^2 a = a^3 \quad \Longrightarrow \quad r = \frac{a}{\sqrt{\pi}} \approx 0{,}56\,a.$$

2. Боковые поверхности. У кубика четыре боковые грани по a^2 (верхняя и нижняя заклеены): $A_к = 4a^2$. У цилиндра боковая поверхность при развёртке — прямоугольник высотой a и шириной, равной длине окружности основания $2\pi r$:

$$A_ц = 2\pi r\, a = 2\pi \frac{a}{\sqrt{\pi}}\, a = 2\sqrt{\pi}\, a^2 \approx 3{,}54\,a^2.$$

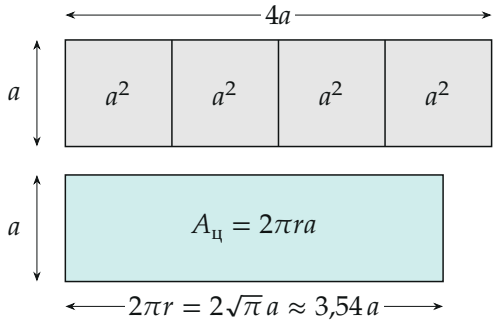


Рис. 2. Развёртки боковых поверхностей: у кубика $4a^2$, у цилиндра $2\sqrt{\pi}\,a^2 \approx 3{,}54\,a^2$ — примерно на 11% меньше

3. Время остывания. Опишем остывание законом теплообмена: за малое время dt тело с температурой T отдаёт воде с температурой $T_в$ теплоту

$$\delta Q = k\,A\,(T - T_в)\,dt,$$

где k — коэффициент теплообмена (одинаков для обоих грузил: тот же металл, та же вода). Температура тела при этом уменьшается на $dT = -\delta Q/(cm)$, где c — удельная теплоёмкость свинца, m — масса грузила, одинаковая у обоих:

$$\frac{dT}{dt} = -\frac{k\,A}{c\,m}\,(T - T_в).$$

Здесь у кубика и цилиндра различается только площадь A. Значит, одну и ту же температуру цилиндр проходит в $A_к/A_ц$ раза медленнее: на каждой температуре скорость остывания пропорциональна A. Время остывания от 80 до 36,6 °C — сумма малых промежутков, каждый из которых обратно пропорционален A; поэтому

$$t_ц A_ц = t_к A_к \quad\Longrightarrow\quad t_ц = t_к\,\frac{A_к}{A_ц} = 30\cdot\frac{4a^2}{2\sqrt{\pi}\,a^2} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\cdot 30\text{ с} \approx 33{,}85\text{ с}.$$

Температура воды в проруби, k и c нигде не понадобились: они одинаковы и сократились.

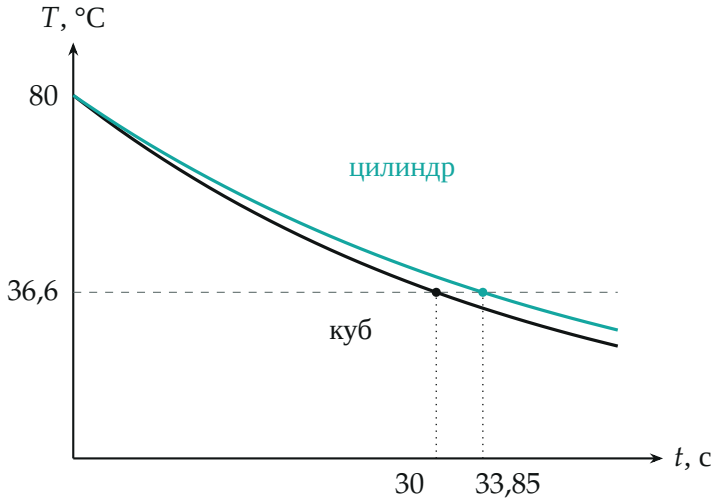


Рис. 3. Остывание грузил (иллюстрация при условной температуре воды 0 °C): цилиндр остывает медленнее, до 36,6 °C — за 33,85 с вместо 30 с

Обратите внимание: ленту нельзя не учитывать. Если считать всю поверхность (как будто ленты нет), получится $A_к = 6a^2$, $A_ц = 2\pi r^2 + 2\pi ra = (2 + 2\sqrt{\pi})a^2$ и $t_ц \approx 32{,}5$ с — неверно: у цилиндра с лентой основания не отдают теплоту, и разница площадей другая.

Проверка. Размерность: отношение площадей безразмерно, время получается в секундах. Знак: поверхность цилиндра меньше, значит, остывает он медленнее, $t_ц > t_к$, как и получилось ($33{,}85 > 30$ с). Второй способ — численно: подберём k так, чтобы кубик остыл за 30 с (при условной $T_в = 0$ °C), и посчитаем цилиндр с площадью $3{,}54a^2$: получаем 33,85 с — то же, что и в формуле, при любой температуре воды. Физический смысл: при одинаковых массе и высоте цилиндр «компактнее» куба — у него меньше боковая поверхность, и он дольше сохраняет тепло.

Ответ. $t_ц = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}} t_к \approx 33{,}85$ с.