Туристы и два велосипеда

Задача 1. [МОШ 2015/16, 9 класс, задача 1] Группа из трех туристов должна перебраться из пункта A в пункт B по дороге длиной $S = 45$ км. Стартуют все туристы одновременно. На всю группу туристов есть только два велосипеда, причем если на велосипеде едут двое, то их скорость равна $3V$, а если на велосипеде едет один человек, то его скорость равна $4V$. Если же турист идет пешком, то его скорость движения равна $V = 5$ км/час. За какое минимальное время все туристы могут оказаться в пункте назначения? Временем посадки туристов на велосипед, а также временами разгона и торможения можно пренебречь.

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на эстафету с велосипедами. Велосипедов два, людей трое, поэтому вдвоём на одном велосипеде ехать приходится (иначе кто-то идёт пешком всю дорогу), но вдвоём медленнее ($3V < 4V$). Выручает то, что велосипед можно *оставить на дороге*: его подберёт тот, кто идёт сзади. Ищем такую схему, при которой все трое приходят в B одновременно: если бы один пришёл раньше, часть его пути на велосипеде можно было бы заменить ходьбой, а освободившийся велосипед отдать отстающим.

Обозначения. Туристы A, B, C (буквы, чтобы не путать с пунктами). τ — время первого этапа, T — искомое общее время. Все расстояния отсчитываем от пункта A вдоль дороги.

1. Способ. Схема на рис. 1.

- Этап 1 (от 0 до τ). A и B едут вдвоём на первом велосипеде со скоростью $3V$, C едет один на втором со скоростью $4V$. К моменту τ пара проехала $3V\tau$, а C — $4V\tau$.
- В момент τ C оставляет второй велосипед на дороге в точке на расстоянии $4V\tau$ от старта и дальше идёт пешком. B слезает с первого велосипеда и идёт пешком к оставленному велосипеду (до него $4V\tau - 3V\tau = V\tau$, это ещё τ времени), а затем едет на нём один до конца. A остаётся на первом велосипеде один, едет со скоростью $4V$, догоняет идущего C, сажает его, и дальше они вдвоём едут на первом велосипеде со скоростью $3V$ до пункта B.

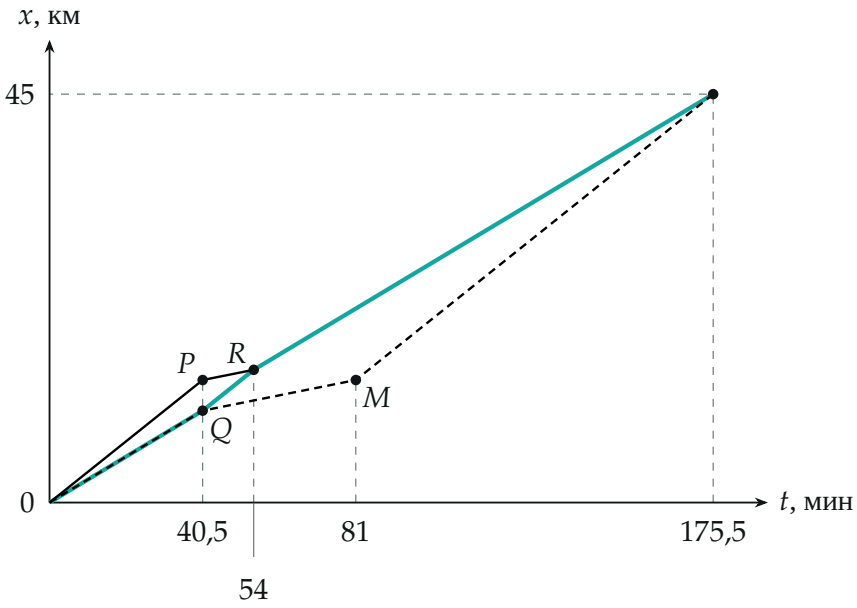


Рис. 1. Положения туристов: A — *бирюзовая линия*, B — *пунктир*, C — *чёрная. Наклон линии — скорость:* V *(пешком),* $3V$ *(вдвоём),* $4V$ *(один).* P — C *оставил велосипед (*13,5 *км);* Q — B *слез (*10,1 *км);* R — A *догнал* C *(*14,6 *км);* M — B *дошёл до велосипеда*

Те же этапы по времени — на рис. 2: у каждого в сумме одно и то же время T.

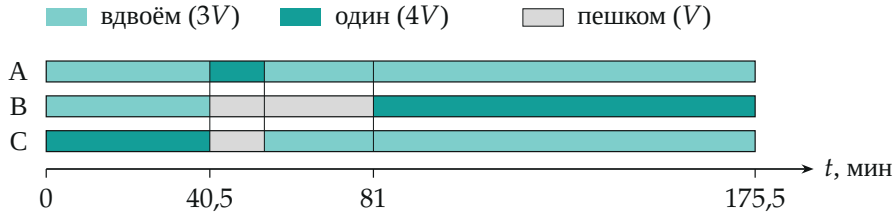


Рис. 2. Кто и как двигался в каждый промежуток времени

2. Условие одновременного прибытия. Выразим T через τ двумя способами — по пути B и по пути пары A, C — и приравняем.

Путь B. К моменту 2τ он дошёл до оставленного велосипеда (точка $4V\tau$) и дальше едет один со скоростью $4V$ до конца пути S в течение

$T-2\tau$:

$$S = 4V\tau + 4V(T-2\tau) \quad \Rightarrow \quad T = \tau + \frac{S}{4V}.$$

Путь A *и* C. После момента τ A (скорость $4V$) стартует из точки $3V\tau$, а C (скорость V) — из точки $4V\tau$. Расстояние между ними $V\tau$, а сближаются они со скоростью $4V - V = 3V$, поэтому время погони

$$s = \frac{V\tau}{3V} = \frac{\tau}{3}, \qquad \text{место встречи } x_{\text{в}} = 4V\tau + V\frac{\tau}{3} = \frac{13}{3}V\tau.$$

Дальше вдвоём они едут со скоростью $3V$ от момента $\tau + \tau/3 = \frac{4}{3}\tau$ до T:

$$S = \frac{13}{3}V\tau + 3V\Big(T - \frac{4}{3}\tau\Big) = 3VT + \frac{V\tau}{3} \quad \Rightarrow \quad T = \frac{S}{3V} - \frac{\tau}{9}.$$

3. Время. Приравняем два выражения для T:

$$\tau + \frac{S}{4V} = \frac{S}{3V} - \frac{\tau}{9} \quad \Rightarrow \quad \frac{10}{9}\tau = \frac{S}{12V} \quad \Rightarrow \quad \tau = \frac{3}{40}\,\frac{S}{V},$$

$$T = \tau + \frac{S}{4V} = \Big(\frac{3}{40} + \frac{10}{40}\Big)\frac{S}{V} = \frac{13}{40}\,\frac{S}{V}.$$

Числа: $S/V = 45/5 = 9$ ч, $\tau = 0{,}675$ ч $= 40{,}5$ мин, $T = \dfrac{13}{40}\cdot 9 = 2{,}925$ ч.

Обратите внимание: этапы можно сдвигать. Если B слезает не в момент τ, а в другой подходящий момент, получается другое расписание, но то же самое $T = \frac{13}{40}\frac{S}{V}$.

4. Почему быстрее нельзя (оценка снизу). Сложим скорости всех троих, Σv, и скорости обоих велосипедов, Σu, и посмотрим на комбинацию $4\Sigma v - 3\Sigma u$ в каждый момент. Возможные режимы: пара и одиночка ($\Sigma v = 3V + 3V + 4V = 10V$, $\Sigma u = 7V$) дают $40V - 21V = 19V$; пара и пешеход при стоящем втором велосипеде ($\Sigma v = 7V$, $\Sigma u = 3V$) — тоже $19V$; два одиночки и пешеход ($9V$, $8V$) — $12V$; один одиночка и два пешехода ($6V$, $4V$) — $12V$; все пешком — $12V$. Значит, всегда $4\Sigma v - 3\Sigma u \le 19V$. Проинтегрируем по времени от 0 до T: каждый турист прошёл S, значит $\int \Sigma v\,dt = 3S$; каждый велосипед сдвинулся не

дальше чем на S, значит $\int \Sigma u\,dt \le 2S$. Отсюда

$$19V\,T \;\ge\; 4\cdot 3S - 3\cdot 2S = 6S \quad\Rightarrow\quad T \ge \frac{6}{19}\,\frac{S}{V} \approx 2{,}84 \text{ ч.}$$

Эта простая оценка уже близка к ответу (2,925 ч): мы проиграли ей только потому, что брошенный впереди велосипед должен дождаться пешехода, а суммы скоростей этого не видят. Точный минимум $\frac{13}{40}\frac{S}{V}$ подтверждён полным перебором расписаний на сетке с шагом $S/40$ (велосипеды можно оставлять и подбирать): за 12 шагов времени все трое не добираются, за 13 — добираются.

Проверка. Пройденные пути должны дать по 45 км каждому.

- A: вдвоём $15\cdot 0{,}675 = 10{,}125$ км; один $20\cdot 0{,}225 = 4{,}5$ км; вдвоём $15\cdot 2{,}025 = 30{,}375$ км. Сумма 45 км.
- B: вдвоём 10,125 км; пешком $5\cdot 0{,}675 = 3{,}375$ км; один $20\cdot 1{,}575 = 31{,}5$ км. Сумма 45 км.
- C: один $20\cdot 0{,}675 = 13{,}5$ км; пешком $5\cdot 0{,}225 = 1{,}125$ км; вдвоём 30,375 км. Сумма 45 км.

Время у каждого 2,925 ч. Оба велосипеда прошли всю дорогу по 45 км и в конце оказались в B: ни один не простаивал дольше, чем нужно, чтобы его подобрал идущий.

Ответ. $T = \dfrac{13}{40}\cdot\dfrac{S}{V} = 2{,}925$ ч $= 2$ ч 55 мин 30 с.