Удав, слон и попугай

Задача 2. [МОШ 2015/16, 9 класс, задача 2] С момента написания писателем Григорием Остером новелл про четверых друзей — Мартышку, Слоненка, Удава и Попугая — прошло уже почти 40 лет. За это время Слоненок вырос и превратился в СЛОНА, Удав стал еще длиннее, Попугай состарился и сгорбился, а Мартышка служит теперь чучелом в зоологическом музее. На очередном собрании друзья вспомнили, как они измеряли длину удава, и решили тряхнуть стариной. Удав, лежа на горизонтальном полу, вычислил расстояние от пола до своего центра масс, и оказалось, что оно равно 10 см. Центр масс Слона оказался на высоте 2 м над полом. Центр масс Удава и Слона вместе взятых находился на высоте 1,7 м. Когда на голову слона на высоте 3,5 м над полом сел Попугай, центр масс всех троих оказался выше еще на 0,5 мм. Какова масса Удава в Попугаях, если высота Попугая намного меньше толщины Удава?

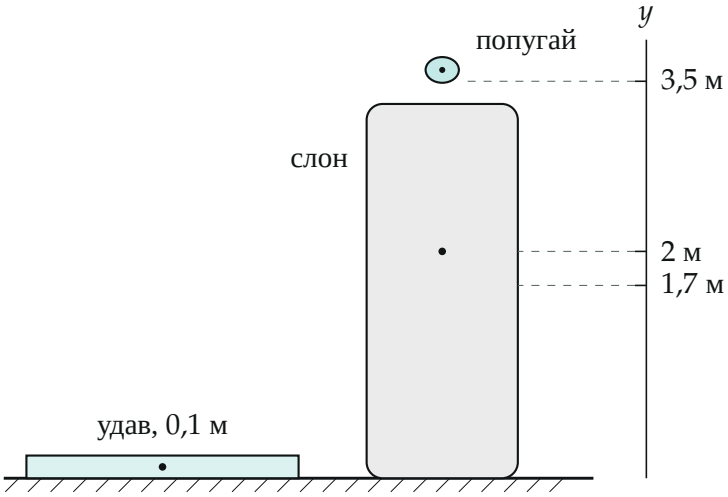


Рисунок к задаче: высоты центров масс (чёрные точки) над полом. Масштаб по высоте один для всех, толщина удава в нём 0,2 м

▲ **Решение. Что происходит.** Центр масс системы тел — это среднее значение координат, где каждое тело входит с весом, равным его массе.

Вертикальная координата центра масс системы из тел с массами m_i и высотами центров масс y_i:

$$y_c = \frac{\sum m_i y_i}{\sum m_i}.$$

По трём высотам (удав, слон, пара) найдём отношение масс удава и слона, по сдвигу на 0,5 мм — во сколько раз попугай легче пары. Попугай мал, его высота — одна точка 3,5 м.

Обозначения. $M_у$, $M_с$, $M_п$ — массы удава, слона, попугая; $y_у = 0{,}1$ м, $y_с = 2$ м, $y_п = 3{,}5$ м — высоты их центров масс над полом; $y_1 = 1{,}7$ м — центр масс удава и слона; $y_2 = y_1 + \Delta = 1{,}7005$ м — центр масс всех троих, $\Delta = 0{,}5$ мм $= 5 \cdot 10^{-4}$ м. Ось y направлена вверх от пола.

1. Отношение масс слона и удава. Запишем определение центра масс для пары (удав + слон):

$$y_1 = \frac{M_у y_у + M_с y_с}{M_у + M_с} \quad \Rightarrow \quad M_у(y_1 - y_у) = M_с(y_с - y_1).$$

Это правило рычага (рис. 2): чем тело тяжелее, тем ближе к нему центр масс. Подставим числа ($1{,}7 - 0{,}1 = 1{,}6$ м и $2 - 1{,}7 = 0{,}3$ м):

$$\frac{M_с}{M_у} = \frac{y_1 - y_у}{y_с - y_1} = \frac{1{,}6}{0{,}3} = \frac{16}{3}.$$

Масса пары $M = M_у + M_с = M_у(1 + \frac{16}{3}) = \frac{19}{3} M_у$.

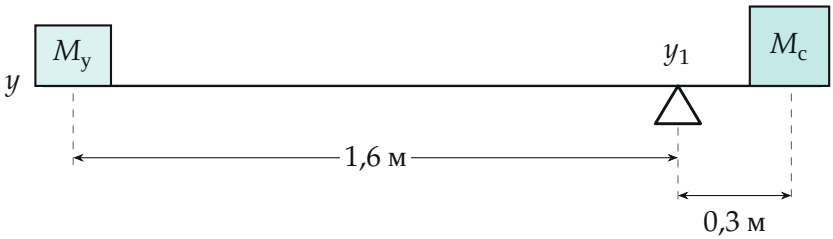


Рис. 2. Рычаг для удава и слона: произведение массы на плечо одинаково с обеих сторон от точки опоры y_1 (центра масс пары)

2. Масса попугая. Теперь систему образуют пара (масса M, центр масс на высоте y_1) и попугай (масса $M_\text{п}$, высота $y_\text{п}$). Центр масс трёх тел — на высоте y_2:

$$y_2 = \frac{My_1 + M_\text{п}y_\text{п}}{M + M_\text{п}} \quad \Rightarrow \quad M(y_2 - y_1) = M_\text{п}(y_\text{п} - y_2).$$

Отсюда $y_2 - y_1 = \Delta$ и $y_\text{п} - y_2 = 3{,}5 - 1{,}7005 = 1{,}7995$ м:

$$M = M_\text{п}\frac{y_\text{п} - y_2}{y_2 - y_1} = M_\text{п} \cdot \frac{1{,}7995}{0{,}0005} = 3599\,M_\text{п}.$$

Видно: чтобы сдвинуть центр масс на полмиллиметра, масса попугая должна быть примерно в 3600 раз меньше массы остальных, — это и есть масса пары, выраженная в попугаях.

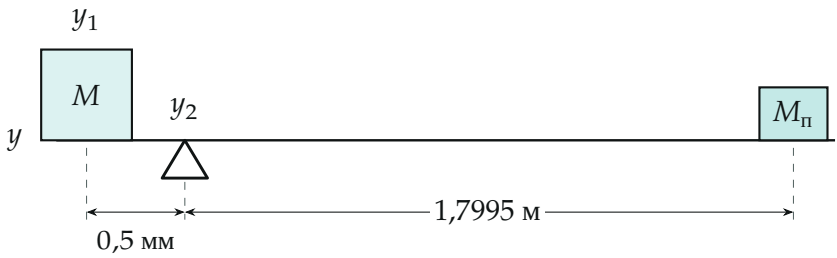


Рис. 3. Рычаг для пары и попугая. Сдвиг 0,5 мм изображён не в масштабе — в масштабе он был бы невидим

3. Масса удава. Из пункта 1: $M_\text{у} = \frac{3}{19}M$, поэтому

$$M_\text{у} = \frac{3}{19} \cdot 3599\,M_\text{п} \approx 568\,M_\text{п}.$$

Обратите внимание: ответ обратно пропорционален сдвигу $\Delta = 0{,}5$ мм, поэтому он очень чувствителен к этой малой величине. Ошибка в 1 % при её измерении даёт ошибку около 6 попугаев; отсюда допуск 560–570 в критериях организаторов.

Проверка. Подставим массы $M_\text{п} = 1$, $M_\text{у} \approx 568{,}3$, $M_\text{с} = \frac{16}{3}M_\text{у} \approx$

3030,7 в определение центра масс:

$$y_1 = \frac{568{,}3 \cdot 0{,}1 + 3030{,}7 \cdot 2}{3599} \approx 1{,}700 \text{ м},$$

$$y_2 = \frac{3599 \cdot 1{,}7 + 1 \cdot 3{,}5}{3600} \approx 1{,}7005 \text{ м}.$$

Обе высоты совпадают с условием. Точный подсчёт без округления y_1:
$y_2 - y_1 = \dfrac{y_\text{п} - y_1}{M/M_\text{п} + 1} = \dfrac{1{,}8}{3600} = 5 \cdot 10^{-4}$ м, то есть опять 0,5 мм.

Ответ. $M_\text{у} \approx 568\, M_\text{п}$ (допустимы значения от 560 до 570).