Груз и ящик с катушкой

Задача 3. [МОШ 2015/16, 9 класс, задача 3] Невесомая нерастяжимая нить перекинута через идеальный блок. К одному концу нити прикреплен груз массой m_2, а другой конец нити наматывается на невесомую катушку радиусом r, расположенную внутри ящика массой m_1. Катушка вращается электродвигателем с постоянной угловой скоростью ω. Участки нити, не прилегающие к блоку и катушке, в процессе движения вертикальны, система крепления катушки к ящику и электродвигатель очень легкие. Найдите модуль ускорения a груза m_2.

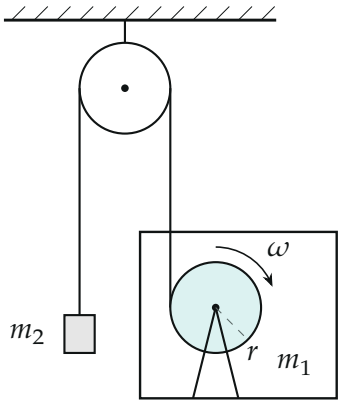


Рисунок к задаче

▲ **Решение. Что происходит.** Нить перекинута через блок: один её участок идёт вниз к грузу m_2, второй — вниз к катушке в ящике m_1. Катушка вращается равномерно и тянет нить на себя с постоянной скоростью ωr относительно ящика. Постоянная скорость — значит, нить сматывается со скоростью, у которой ускорения нет, и ускорения груза и ящика связаны так же, как для нити постоянной длины: если груз идёт вниз с ускорением a, то ящик идёт вверх с таким же по модулю. Дальше — второй закон Ньютона для каждого тела; натяжение T у идеального блока и невесомой нити одно и то же по всей длине.

Обозначения. Ось y направлена *вниз*; y_1 и y_2 — координаты ящика и груза (точнее, места, где нить сходит с катушки, и груза) от уровня оси

блока; $a_1 = \ddot{y}_1, a_2 = \ddot{y}_2$ — проекции ускорений на ось y; T — натяжение нити; s — длина нити, намотанной на катушку.

1. Связь ускорений. Длина нити l постоянна. Она складывается из участка к грузу y_2, участка к катушке y_1, дуги на блоке (постоянной, нить по блоку не проскальзывает на постоянной дуге) и намотанной на катушку части s:

$$y_2 + y_1 + s + \text{const} = l.$$

Катушка радиусом r вращается с постоянной угловой скоростью ω, поэтому за время t она наматывает дугу $\omega t \cdot r$:

$$s = s_0 + \omega r\, t, \qquad \dot{s} = \omega r = \text{const}, \qquad \ddot{s} = 0.$$

Продифференцируем условие постоянства длины дважды по времени:

$$a_2 + a_1 + \ddot{s} = 0 \quad \Rightarrow \quad a_1 = -a_2.$$

Ящик ускоряется в сторону, противоположную грузу, на такую же величину: так же, как если бы катушки не было, а нить была закреплена на ящике. Угловая скорость ω в ответ не войдёт: она добавляет к скоростям тел постоянную добавку, а ускорения от неё не меняются.

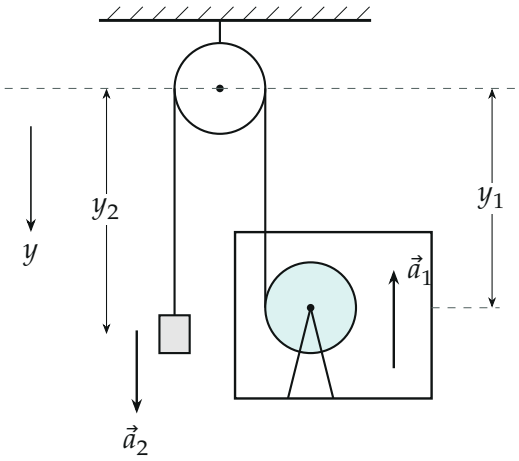


Рис. 2. Координаты y_1, y_2 от уровня оси блока и ускорения при $m_2 > m_1$: груз вниз, ящик вверх

2. Силы и законы Ньютона. На груз действуют сила тяжести $m_2 g$ вниз и натяжение нити T вверх. На ящик вместе с катушкой, двигателем и креплением (они очень лёгкие, их массой пренебрегаем) действуют сила тяжести $m_1 g$ вниз и вверх — сила со стороны нити, равная натяжению T (нить натянута и тянет катушку вверх). Двигатель — внутренняя часть ящика: он закручивает катушку, но вертикальной внешней силы на ящик не добавляет.

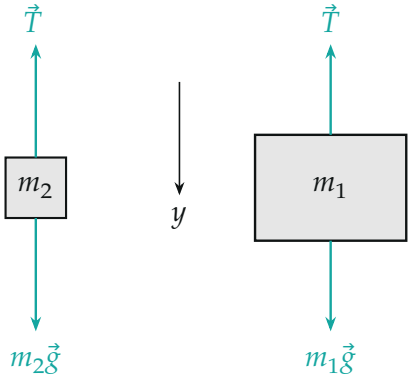


Рис. 3. Силы, действующие на груз и на ящик

Запишем второй закон Ньютона в проекции на ось y (вниз) для груза и для ящика с катушкой:

$$m_2 a_2 = m_2 g - T, \qquad m_1 a_1 = m_1 g - T, \qquad a_1 = -a_2.$$

Неизвестных осталось три: T, a_2 (и $a_1 = -a_2$). Выразим T из первого уравнения: $T = m_2(g - a_2)$, и подставим во второе:

$$-m_1 a_2 = m_1 g - m_2(g - a_2) \;\Rightarrow\; (m_1 + m_2)\, a_2 = (m_2 - m_1)\, g.$$

Отсюда

$$a_2 = \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} g, \qquad T = m_2(g - a_2) = \frac{2 m_1 m_2}{m_1 + m_2} g > 0.$$

Знак a_2 словами: при $m_2 > m_1$ груз идёт вниз, ящик вверх; при $m_2 < m_1$

— наоборот. Нить во всех случаях натянута ($T > 0$), поэтому уравнения законны.

Обратите внимание: сила, с которой катушка тянет ящик, — это именно натяжение нити; от ω она не зависит, потому что скорость намотки постоянна (нет ускорения нити относительно ящика). Если бы катушка разгонялась, в связь ускорений вошло бы $\ddot{s} = \dot{\omega} r \neq 0$.

Проверка. Пределы: $m_1 = m_2$ даёт $a = 0$ (силы тяжести уравновешены нитью — тела движутся равномерно); $m_1 \to 0$ даёт $a_2 \to g$ (груз падает свободно, натяжение $T \to 0$); $m_1 \gg m_2$ даёт $a_2 \to -g$: тяжёлый ящик падает с ускорением g, а груз взлетает вверх с таким же. Размерность: отношение масс безразмерно, остаётся g.

Ответ. $a = \left|\dfrac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1}\right| g.$