Таяние льда вокруг полости

Задача 4. [МОШ 2015/16, 9 класс, задача 4] В широком цилиндрическом калориметре (см. рис.), частично заполненном льдом при температуре $t_0 = 0$ °C, во льду имеется цилиндрическая полость радиусом $R = 10$ см, которая сначала ничем не заполнена. В эту полость через небольшое отверстие сверху быстро залили воду, имевшую температуру $t = 10$ °C. Лёд начал таять, и, поскольку плотность льда меньше плотности воды, уровень воды начал опускаться. Но через отверстие сверху сразу стали доливать воду, так, чтобы полость в калориметре всё время была полностью заполнена водой. Температура доливаемой воды также равна t. Воду внутри калориметра постоянно перемешивают, так, чтобы лёд во всех точках таял с одинаковой скоростью. В некоторый момент температура воды в калориметре опустилась до $t_0 = 0$ °C, и лёд таять перестал. Найдите радиус полости, заполненной водой, в этот момент. Плотность воды $\rho_в = 1000$ кг/м^3, плотность льда $\rho_л = 900$ кг/м^3, удельная теплоёмкость воды $c = 4200$ Дж/(кг·°C), удельная теплота плавления льда $\lambda = 330$ кДж/кг.

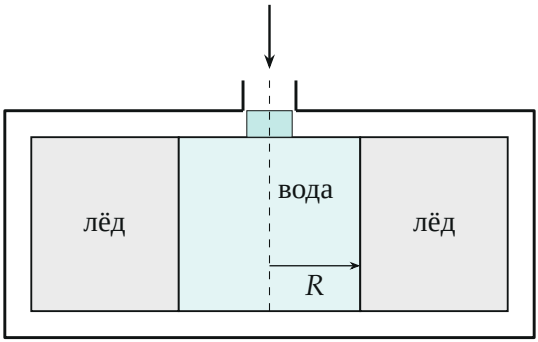


Рисунок к задаче: разрез калориметра

▲ **Решение.** **Что происходит.** Вода, залитая в полость при $t = 10$ °C, остывает до 0 °C и отдаёт тепло льду: лёд тает, полость растёт. Лёд менее плотный, чем вода: из растаявшего куска получается воды меньше по объёму, чем занимал лёд, поэтому уровень в полости опускается, и приходится доливать воду температуры t. Её тоже нужно учесть: она

остывает до 0 °C и тоже отдаёт тепло. Задача — тепловой баланс с плавлением плюс баланс масс. Ключевое: тепло отдают *все* порции воды с температурой t — и залитая сначала, и долитая; вода, образовавшаяся изо льда, уже при 0 °C и тепла не отдаёт.

Обозначения. h — высота полости (она занимает всю высоту льда, при таянии радиус растёт, высота не меняется); R и R_1 — начальный и конечный радиусы полости; $M_0 = \rho_в \pi R^2 h$ — масса воды, залитой сначала; $M_д$ — общая масса долитой воды; $M_т$ — масса растаявшего льда; $V = \pi h(R_1^2 - R^2)$ — объём льда, который растаял, то есть объём кольцевого слоя между радиусами R и R_1.

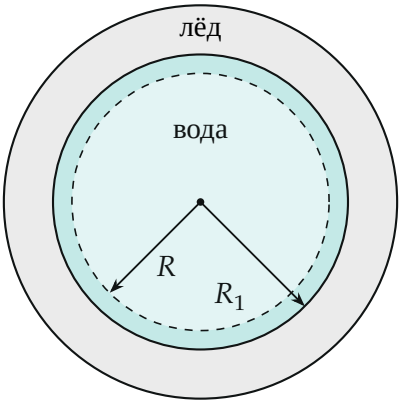


Рис. 2. Вид сверху: пунктир — начальная полость радиусом R, окружность радиусом R_1 — граница в конце. Растаял лёд в кольце между ними (разница радиусов для наглядности увеличена)

1. Балансы масс. Растаявший лёд занимал кольцо объёма V, поэтому

$$M_т = \rho_л V = \rho_л \pi h(R_1^2 - R^2).$$

В конце всё кольцо заполнено водой, причём эта вода — растаявший лёд (масса $M_т$) и долитая вода (масса $M_д$); значит, масса воды в кольце равна $\rho_в V$:

$$M_т + M_д = \rho_в V \quad \Rightarrow \quad M_д = (\rho_в - \rho_л)V.$$

Объём долитой воды — это та разница объёмов, которая получается, потому что вода из льда занимает меньший объём, чем сам лёд.

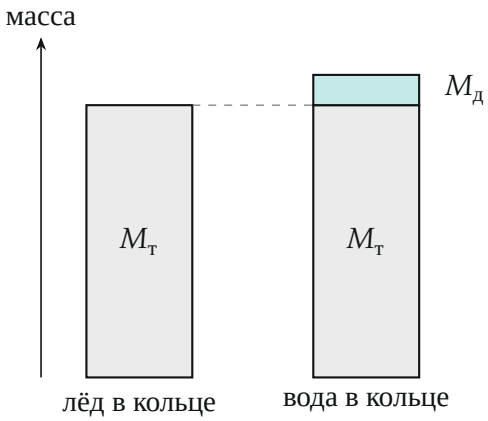


Рис. 3. В одном и том же объёме V воды больше по массе, чем льда, на $M_д$

2. Тепловой баланс. Тепло, которое растаявшему льду отдаёт вода, остывающая от t до 0 °C. Остывает вся вода температуры t: залитая сначала (M_0) и долитая ($M_д$). Лёд исходно при 0 °C, поэтому он не греется, а только плавится, а вода из него остаётся при 0 °C. Записываем уравнение теплового баланса: тепло, отданное водой при остывании до 0 °C, равно теплоте плавления льда (c — удельная теплоёмкость воды, потери и теплоёмкость калориметра не учитываем):

$$ct\,(M_0 + M_д) = \lambda M_т.$$

3. Радиус. Подставим массы, сократив общий множитель πh:

$$ct[\rho_в R^2 + (\rho_в - \rho_л)(R_1^2 - R^2)] = \lambda\rho_л(R_1^2 - R^2).$$

Заметим, что в скобке $\rho_в R^2 + (\rho_в - \rho_л)(R_1^2 - R^2) = \rho_в R_1^2 - \rho_л(R_1^2 - R^2)$. Тогда

$$ct\,\rho_в R_1^2 = (ct + \lambda)\,\rho_л\,(R_1^2 - R^2) \;\Rightarrow\; R_1^2\Big[1 - \frac{\rho_в}{\rho_л}\cdot\frac{ct}{ct+\lambda}\Big] = R^2,$$

$$R_1 = \frac{R}{\sqrt{1 - \dfrac{\rho_в}{\rho_л} \cdot \dfrac{ct}{ct + \lambda}}}.$$

Числа: $ct = 4200 \cdot 10 = 4{,}2 \cdot 10^4$ Дж/кг, $ct + \lambda = 3{,}72 \cdot 10^5$ Дж/кг, $\dfrac{ct}{ct + \lambda} = 0{,}1129$, $\dfrac{\rho_в}{\rho_л} = 1{,}111$, произведение 0,1254:

$$R_1 = \frac{10\text{ см}}{\sqrt{1 - 0{,}1254}} = \frac{10}{0{,}9352}\text{ см} \approx 10{,}7\text{ см}.$$

Обратите внимание: нельзя считать только воду, налитую сначала (она одна растопила бы меньше льда), и нельзя забыть, что долитая вода тоже остывает от t до 0 °C. Масса долитой воды определяется не нашим выбором, а условием «полость всё время полностью заполнена».

Проверка. Если вода и лёд одинаковой плотности ($\rho_в = \rho_л$), доливать не надо, $M_д = 0$, и формула даёт $R_1^2 = R^2(1 - \frac{ct}{ct+\lambda})^{-1} = R^2\frac{ct+\lambda}{\lambda}$, то есть $\lambda\rho\pi h(R_1^2 - R^2) = ct\rho\pi hR^2$ — обычный баланс для одной порции воды. Если $t \to 0$, $R_1 \to R$: лёд не тает. Размерность: $ct/(ct + \lambda)$ безразмерно.

Ответ. $R_1 = \dfrac{R}{\sqrt{1 - \dfrac{\rho_в}{\rho_л} \cdot \dfrac{ct}{ct + \lambda}}} \approx 10{,}7$ см.