Очередь роботов на зарядке

Задача 5. [МОШ 2015/16, 9 класс, задача 5] На планете системы звезды Шедар один из пунктов зарядки роботов-исполнителей обслуживает по одному роботу со скоростью 60 роботов в час (р/ч). В один из дней роботы приходили на пункт в течение 8 часов. Первый час они приходили со скоростью 70 р/ч. В течение второго часа скорость поступления роботов равномерно увеличивалась, составив к его концу 80 р/ч. Потом в течение третьего часа скорость поступления роботов равномерно уменьшалась и упала к его концу обратно до 70 р/ч. На четвёртом часу скорость прихода роботов равномерно падала, составив к концу часа 20 р/ч, и потом оставалась такой в течение пятого и шестого часов. На седьмом часу опять был равномерный подъём скорости поступления роботов — до 100 р/ч в конце часа, а на восьмом часу — наблюдалось равномерное убывание скорости поступления до 60 р/ч. Роботы строго соблюдают очерёдность, а после зарядки сразу покидают пункт.

1. Сколько времени работал пункт в этот день, если были заряжены все роботы?
2. Какова наибольшая продолжительность пребывания робота на пункте зарядки (в очереди и на самой зарядке) в этот день?

▲ **Решение.** **Что происходит.** Это задача на накопление: число роботов на пункте меняется со скоростью «приход минус обслуживание». Приход $\lambda(t)$ — скорость в р/ч, а число пришедших за промежуток — площадь под графиком $\lambda(t)$. Обслуживание — постоянные 60 р/ч. Пока $\lambda > 60$, очередь растёт, пока $\lambda < 60$, убывает (но не ниже нуля: пустой пункт не «копит» обслуживание). Очередь максимальна в тот момент, когда приход сравнялся с обслуживанием.

Обозначения. t — время от начала приёма, ч; $\lambda(t)$ — скорость прихода роботов, р/ч; $N(t)$ — число роботов на пункте (в очереди и на зарядке); A_k — число роботов, пришедших в k-й час, то есть при t от $k-1$ до k.

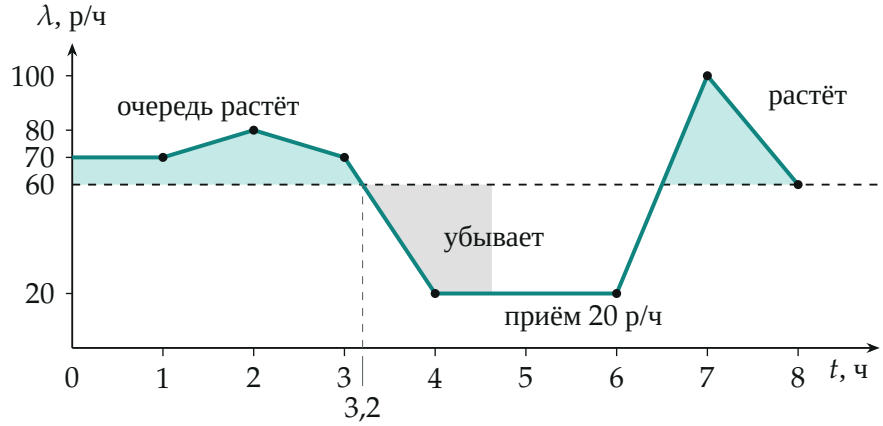


Рис. 1. Скорость прихода $\lambda(t)$ (сплошная линия) и обслуживание 60 р/ч (пунктир). Бирюзовые области — очередь растёт, серая — рассасывается

1. Сколько роботов пришло за каждый час. Скорость в каждом часе линейна, поэтому число пришедших — площадь трапеции, то есть среднее арифметическое скоростей в начале и в конце часа (за 1 ч):

$$A_1 = 70, \quad A_2 = \frac{70+80}{2} = 75, \quad A_3 = \frac{80+70}{2} = 75,$$
$$A_4 = \frac{70+20}{2} = 45, \quad A_5 = A_6 = 20,$$
$$A_7 = \frac{20+100}{2} = 60, \quad A_8 = \frac{100+60}{2} = 80.$$

2. Число роботов на пункте к концу каждого часа. За час пункт заряжает 60 роботов, если очередь не опустела. Поэтому за час число роботов меняется на $A_k - 60$ (но не опускается ниже нуля):

k	1	2	3	4	5	6	7	8
A_k	70	75	75	45	20	20	60	80
$N(k)$	10	25	40	25	0	0	10	30

Первые три часа очередь растёт: $10 \to 25 \to 40$. В четвёртый час приход (45) меньше обслуживания, и очередь падает: $40 \to 25$. В пятый час приходит 20 роботов, а обслужить можно 60: очередь 25 при скорости

убывания $60 - 20 = 40$ р/ч исчезает через $25/40 = 0{,}625$ ч, то есть в момент $t = 4{,}625$ ч, раньше конца часа. Дальше пункт пуст (каждый пришедший заряжается сразу): $N(5) = N(6) = 0$, а не отрицательное «$N - 60 + A$».

В седьмой час $\lambda(t) = 20 + 80(t - 6)$ доходит до 60 р/ч при $t = 6{,}5$ ч, и только тогда появляется очередь: $N(7)$ — площадь треугольника над линией 60 р/ч, $\frac{1}{2} \cdot 0{,}5 \cdot 40 = 10$. В восьмой час λ от 100 до 60, очередь растёт ещё на $\frac{40+0}{2} \cdot 1 = 20$: $N(8) = 30$.

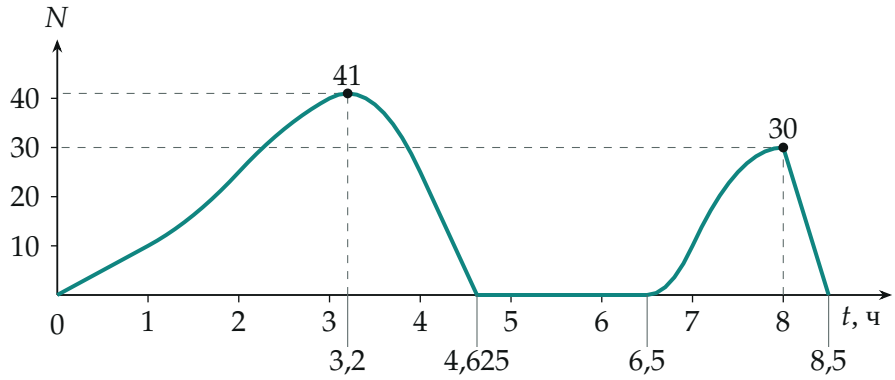


Рис. 2. Число роботов на пункте $N(t)$. Так как обслуживание 60 р/ч, робот, пришедший при N роботах на пункте (включая его самого), проведёт на пункте $N/60$ ч $= N$ мин: по этому же графику можно читать время пребывания в минутах

Пункт 1. Сколько работал пункт. К концу восьмого часа на пункте 30 роботов, и больше никто не придёт. Они заряжаются по очереди по 1 мин на робота (скорость 60 р/ч):

$$t_{\text{раб}} = 8 \text{ ч} + \frac{30}{60} \text{ ч} = 8{,}5 \text{ ч}.$$

Пункт 2. Наибольшее время пребывания. Робот, пришедший в момент t, заставший на пункте $N(t)$ роботов (считая его самого), покидает пункт, когда обслужат всех, кто впереди, и его: через $N(t)/60$ ч, так как пункт даёт 60 роботов в час и роботы строго соблюдают очерёдность. Значит, ищем наибольшее N: оно там, где приход сравнялся с

обслуживанием, — по таблице внутри четвёртого часа. В четвёртый час $\lambda(t) = 70 - 50(t-3)$; $\lambda = 60$ при $t - 3 = 0{,}2$ ч, то есть при $t = 3{,}2$ ч. Число роботов на пункте в этот момент — 40 плюс разность пришедших и обслуженных за 0,2 ч:

$$N_{\max} = 40 + \int_0^{0{,}2} (\lambda - 60)\,dt = 40 + \int_0^{0{,}2} (10 - 50s)\,ds = 40 + (2-1) = 41.$$

То же по рисунку: площадь над линией 60 р/ч до $t = 3{,}2$ ч — это $10 + 15 + 15 + 1 = 41$. Время пребывания

$$\tau_{\max} = \frac{N_{\max}}{60} = \frac{41}{60}\text{ ч} = 41\text{ мин}.$$

Позже очередь только убывает до нуля, а в конце растёт лишь до $30 < 41$: $N = 41$ — настоящий максимум за день.

Обратите внимание: по значениям на концах часов ($N \le 40$) получилось бы 40 мин — максимум достигается *внутри* часа.

Проверка. Всего пришло $70+75+75+45+20+20+60+80 = 445$ роботов. За 8,5 ч пункт мог бы зарядить $60 \cdot 8{,}5 = 510$, значит, $510 - 445 = 65$ «мест» пропало, когда очередь была пуста. Это площадь между линией 60 р/ч и графиком λ после того, как очередь исчезла: от $t = 4{,}625$ до 6 ч $(60 - 20) \cdot 1{,}375 = 55$ и от 6 до 6,5 ч $\frac{1}{2} \cdot 0{,}5 \cdot 40 = 10$, всего 65. Сходится. Второй способ для пункта 2: время пребывания последнего робота 30 мин $<$ 41 мин.

Ответ. 1) 8,5 ч; 2) 41 мин.