Вещество с переменной теплоёмкостью

Задача 6. [МОШ 2015/16, 9 класс, задача 6] В некой лаборатории было получено новое вещество неполитропен с удельной теплоемкостью c, изменяющейся в зависимости от его температуры t так, как показано на графике. Какая температура установится в калориметре, если в нем смешать равные массы неполитропена, взятые при температурах 0 °C и +40 °C? Удельная теплоемкость калориметра мала, потерями теплоты можно пренебречь.

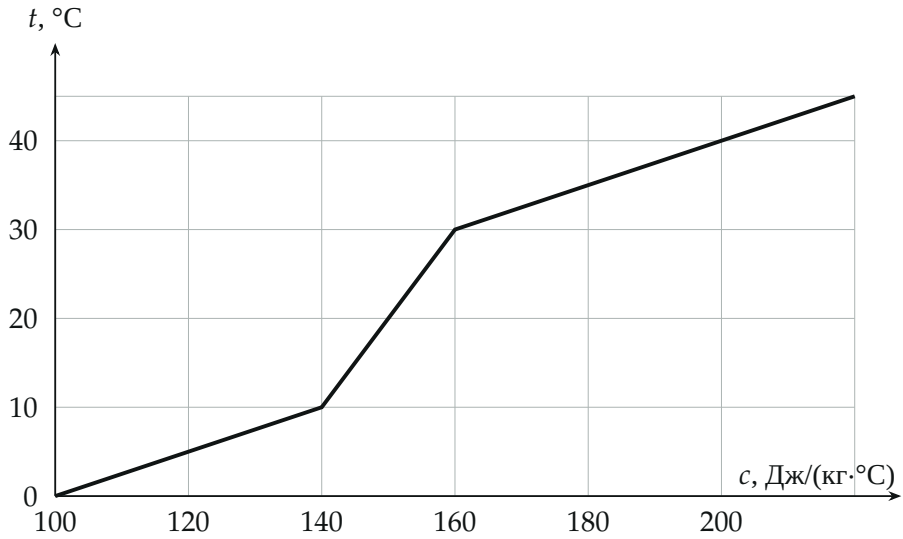


Рисунок к задаче: график $c(t)$

▲ **Решение.** **Что происходит.** Горячая часть (при 40 °C) остывает до t_x и отдаёт ровно столько тепла, сколько холодная (при 0 °C) получает, нагреваясь до t_x. Теплоёмкость меняется с температурой, поэтому формула $Q = cm\,\Delta t$ годится только на малом шаге: $dQ = c(t)\,m\,dt$, а на всём участке тепло — сумма таких вкладов, то есть площадь под графиком $c(t)$ по t. На участке, где график — прямая, это $m \cdot c_{\text{ср}} \cdot \Delta t$, где $c_{\text{ср}}$ — полусумма значений c на концах участка. Качественно: у горячей части теплоёмкость больше, поэтому итог выше 20 °C.

Обозначения. m — масса каждой порции; t_x — конечная температура; $c(t)$ — график. Прочитаем его по клеткам (рис. 1): $c(0) = 100$, $c(10) = 140$, $c(30) = 160$, $c(40) = 200$ Дж/(кг·°C). Отсюда участки:

- от 0 до 10 °C: $c = 100 + 4t$ (растёт на 40 за 10 °C);
- от 10 до 30 °C: $c = 130 + t$ (растёт на 20 за 20 °C);
- от 30 °C и выше: $c = 40 + 4t$ (растёт на 40 за 10 °C; на рис. 1 при 40 °C значение 200).

1. Уравнение теплового баланса. Холодная часть нагревается от 0 до t_x, горячая остывает от 40 до t_x. Тепло одной равно теплу другой, масса m сокращается:

$$m\int_0^{t_x} c\,dt = m\int_{t_x}^{40} c\,dt \quad\Rightarrow\quad \int_0^{t_x} c\,dt = \int_{t_x}^{40} c\,dt.$$

Складывая обе части, получаем полное $\int_0^{40} c\,dt$, и каждая из них равна его половине. Вычислим полную величину по участкам (среднее c на участке на его длину):

$$\int_0^{10} c\,dt = \frac{100+140}{2}\cdot 10 = 1200,$$
$$\int_{10}^{30} c\,dt = \frac{140+160}{2}\cdot 20 = 3000,$$
$$\int_{30}^{40} c\,dt = \frac{160+200}{2}\cdot 10 = 1800,$$

$$\int_0^{40} c\,dt = 6000\ \frac{\text{Дж}}{\text{кг}}.$$

Значит, должно быть $\int_0^{t_x} c\,dt = 3000$ Дж/кг.

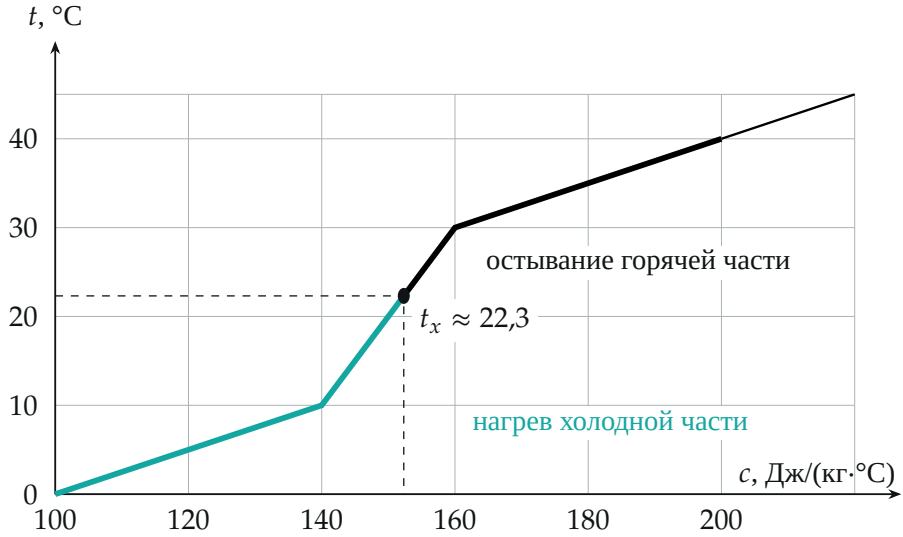


Рис. 2. Холодная часть проходит участок графика от 0 до t_x (бирюзовый), горячая — от 40 до t_x (чёрный); тепла в обеих «площадях» поровну

2. Где лежит t_x. Холодная часть уже на первом участке получает 1200 Дж/кг; до 30 °C получила бы $1200 + 3000 = 4200 > 3000$. Значит, t_x лежит между 10 и 30 °C, там $c = 130 + t$, и недостающие $3000 - 1200 = 1800$ Дж/кг набираются на отрезке от 10 до t_x. Среднее c на нём — полусумма значений на концах, $c(10) = 140$ и $c(t_x) = 130 + t_x$:

$$\frac{140 + 130 + t_x}{2}(t_x - 10) = 1800 \quad \Rightarrow \quad (270 + t_x)(t_x - 10) = 3600.$$

3. Квадратное уравнение. Раскроем скобки:

$$t_x^2 + 260\,t_x - 2700 - 3600 = 0 \quad \Rightarrow \quad t_x^2 + 260\,t_x - 6300 = 0.$$

Положительный корень (второй отрицателен):

$$t_x = -130 + \sqrt{130^2 + 6300} = -130 + \sqrt{23200} = -130 + 20\sqrt{58}$$
$$= 10(2\sqrt{58} - 13) \approx 22{,}3\,^\circ\text{C}.$$

Корень лежит в предполагаемом диапазоне $10 < t_x < 30$, значит, пред-

положение верно.

Обратите внимание: нельзя брать полусумму температур (20 °C), как для постоянной теплоёмкости: c растёт с температурой, и горячая часть при остывании отдаёт больше тепла, чем холодная получает при равном изменении температуры. Ответ определяется именно площадями под графиком.

Проверка. Тепло на единицу массы при $t_x = 22{,}3\,^\circ\text{C}$ ($c(t_x) = 130 + 22{,}3 = 152{,}3$):

$$\int_0^{t_x} c\,dt = 1200 + \frac{140 + 152{,}3}{2} \cdot 12{,}3 \approx 3000,$$
$$\int_{t_x}^{40} c\,dt = \frac{152{,}3 + 160}{2} \cdot 7{,}7 + 1800 \approx 3000.$$

Совпали. Для сравнения: при постоянной теплоёмкости было бы 20 °C; здесь 22,3 °C, больше, потому что у горячей части c больше.

Ответ. $t_x = 10\,(2\sqrt{58} - 13) \approx 22{,}3\,^\circ\text{C}$.