Клин и брусок под растущей силой

Задача 7. [МОШ 2015/16, 9 класс, задача 7] Клин массой $M = 5$ кг с углом при основании $\alpha = 45°$ расположен на гладком горизонтальном столе. На наклонной поверхности клина лежит брусок массой $m = 1$ кг. На брусок начинает действовать сила, направленная горизонтально в сторону клина. Модуль этой силы возрастает с течением времени t по закону $F = \delta t$, где коэффициент пропорциональности $\delta = 1$ Н/с. Коэффициент трения между клином и бруском равен $\mu = 1{,}2$. Найдите модуль силы трения, действующей со стороны клина на брусок через время $T = 12$ с после начала действия силы F, если клин к этому моменту еще не начал опрокидываться. Ускорение свободного падения можно считать равным $g = 10$ м/с^2.

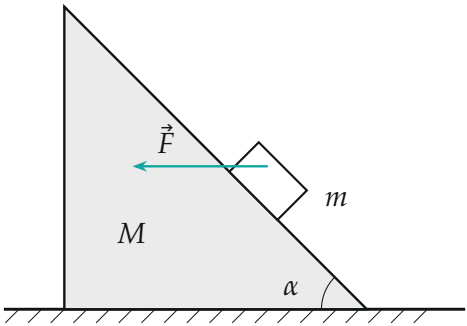


Рисунок к задаче

▲ **Решение. Что происходит.** Сила F растёт плавно, от нуля. Пока брусок не скользит по клину, он и клин движутся как одно целое с одним ускорением a, направленным туда же, куда сила. Сила трения при этом не μN (это только максимум при скольжении), а такая, какая нужна, чтобы брусок *не скользил*: она находится из второго закона Ньютона и меняется со временем вместе с F. В начале брусок просто лежит: трение удерживает его от соскальзывания вниз и направлено вверх вдоль склона. По мере роста F ускорение растёт, брусок как бы отталкивается от склона, и трение, нужное для удержания, убывает, обнуляется и дальше направлено вниз по склону. Нам нужно его значение в момент $T = 12$

с. Класс задачи: тела, движущиеся вместе без проскальзывания, трение покоя из уравнений.

Обозначения. $F = \delta t$ — внешняя сила, направленная горизонтально (положительное направление оси — в сторону клина); a — общее ускорение бруска и клина; N — сила реакции склона на брусок, перпендикулярная склону; f — сила трения, действующая на брусок со стороны клина вдоль склона, положительная, если направлена вверх по склону (знак f определится решением). Оси: x' вдоль склона вверх, y' перпендикулярно склону наружу, чтобы не раскладывать неизвестные N и f по горизонтали и вертикали.

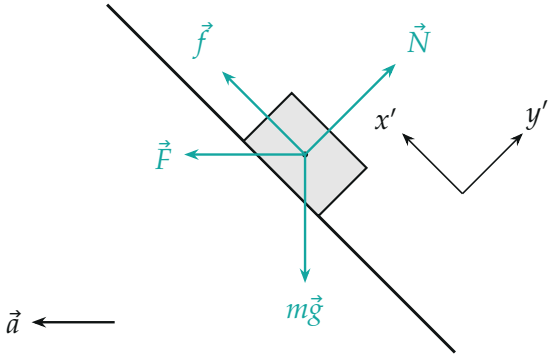


Рис. 2. Силы, действующие на брусок массой m (f показана вверх по склону — так выбран знак), оси x', y' и ускорение $\vec{a}$

1. Общее ускорение. Рассмотрим систему из клина и бруска. Горизонтально на неё действует только внешняя сила F: стол гладкий, реакции стола и силы тяжести вертикальны, силы между клином и бруском — внутренние. Второй закон Ньютона для системы в проекции на горизонталь:

$$F = (M + m)\,a \quad \Rightarrow \quad a = \frac{F}{M + m}.$$

Это верно, пока брусок не скользит и оба тела имеют одно ускорение.

2. Второй закон Ньютона для бруска. Векторно: $m\vec{a} = \vec{F} + m\vec{g} + \vec{N} + \vec{f}$. Спроецируем на оси: вдоль склона вверх (x') и по нормали наружу (y'). Ускорение a горизонтально и направлено в сторону клина, под углом α к оси x': его проекции $a\cos\alpha$ на x' и $-a\sin\alpha$ на y' (оно «вдавливается»

в склон). Проекции остальных векторов — по рис. 2: F даёт $+F\cos\alpha$ и $-F\sin\alpha$, mg даёт $-mg\sin\alpha$ и $-mg\cos\alpha$.

$$x': \quad ma\cos\alpha = F\cos\alpha - mg\sin\alpha + f,$$
$$y': \quad -ma\sin\alpha = -F\sin\alpha - mg\cos\alpha + N.$$

3. Трение. Из первого уравнения $f = mg\sin\alpha - (F - ma)\cos\alpha$. Подставим $a = \dfrac{F}{M+m}$, то есть $F - ma = \dfrac{M}{M+m}F$:

$$f = mg\sin\alpha - \frac{M}{M+m}F\cos\alpha, \qquad N = mg\cos\alpha + \frac{M}{M+m}F\sin\alpha.$$

Знак f словами: пока F мало, $f > 0$ — трение направлено вверх по склону и удерживает брусок; с ростом F оно убывает и при

$$F_0 = \frac{M+m}{M}mg\tan\alpha = \frac{6}{5}\cdot 10\cdot 1 = 12\text{ Н}$$

обращается в нуль, а дальше меняет знак (направлено вниз по склону).

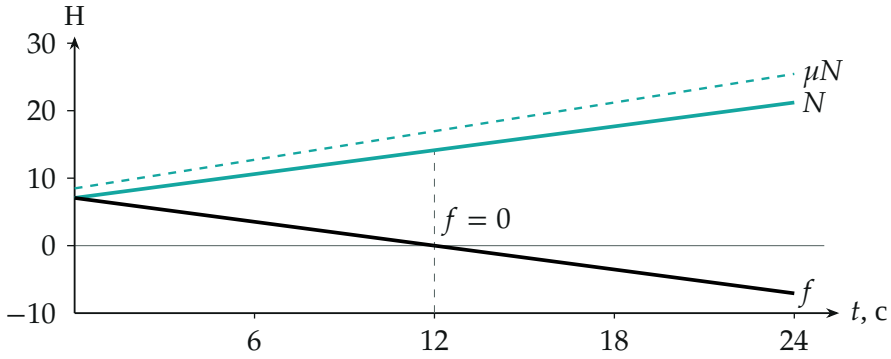


Рис. 3. Трение $f(t)$, реакция $N(t)$ и предельное трение μN: $|f|$ всё время меньше μN, брусок не скользит. Для $t = 12$ с трение равно нулю

4. Применимость: брусок не скользит. Условие покоя относительно клина: $|f| \le \mu N$. При $F = 0$ (начало) $f = mg\sin\alpha$, $N = mg\cos\alpha$, и $mg\sin\alpha \le \mu\, mg\cos\alpha \;\Leftrightarrow\; \tan\alpha \le \mu$: $1 \le 1{,}2$ — верно, брусок лежит.

Дальше f убывает, а N растёт, поэтому условие выполняется всё время (и при $f < 0$: $|f| = \frac{M}{M+m}F\cos\alpha - mg\sin\alpha < \mu N$ при любых F, так как $\mu > 1$). Значит, скольжения нет, и формулы пунктов 1–3 верны на всём промежутке до опрокидывания клина.

5. Момент $T = 12$ **с.** $F = \delta T = 12$ Н, это в точности F_0. Подставим:

$$f = mg\sin\alpha - \frac{M}{M+m}F\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(10 - \frac{5}{6}\cdot 12\right) = 0.$$

В этот момент трение между бруском и клином отсутствует.

Обратите внимание: ответ 0 — не ошибка и не «трение равно μN». Сила трения покоя подстраивается под обстановку и именно в этот момент меняет направление.

Проверка. При $F = 12$ Н $a = \frac{12}{6} = 2$ м/с^2, $N = \frac{\sqrt{2}}{2}(10 + \frac{5}{6}\cdot 12) \approx 14{,}1$ Н. Независимый способ: для клина горизонтальная проекция второго закона (трения нет) $Ma = N\sin\alpha$: $5\cdot 2 = 10$ Н, и $14{,}1\cdot 0{,}707 = 10{,}0$ Н — совпало. Предел $M \to \infty$: $a \to 0$, трение $f \to mg\sin\alpha$ (брусок на неподвижном клине), $F_0 \to mg\tan\alpha$.

Ответ. $F_{\text{тр}} = 0$ Н.