Игра с двумя реостатами

Задача 8. [МОШ 2015/16, 9 класс, задача 8] Алиса и Василиса играют в игру «Постоянный ток». Они соединили последовательно два реостата и идеальный амперметр, и подключили полученную цепь к источнику напряжения. Амперметр показал ток $I_0 = 100$ мА. Школьницы «ходят» по очереди. Одна двигает ползунок своего реостата, и показания амперметра меняются. Другая должна тоже подвинуть ползунок своего реостата, как можно быстрее вернув ток к прежнему значению. После этого «ход» переходит к ней. Реостаты у девушек разные, но на каждом из них ползунок перемещается прямолинейно и в начале игры находится в среднем положении. У Алисы расстояние между крайними возможными положениями ползунка равно $L_A = 36$ см, а у Василисы $L_B = 40$ см.

1. Первой «ходит» Алиса. Она сдвинула свой ползунок на 4 см вправо, и амперметр стал показывать ток $I_1 = 90$ мА. Василиса сдвинула свой ползунок на 5 см влево, и ток вернулся к прежнему значению. Теперь «ходит» Василиса. Она двигает ползунок на 6 см влево. На сколько и в каком направлении должна сдвинуть ползунок Алиса, отвечая на «ход» Василисы?
2. Может ли в течение игры возникнуть ситуация, когда Алиса не сможет ответить на «ход» Василисы?
3. Может ли в течение игры возникнуть ситуация, когда Василиса не сможет ответить на «ход» Алисы?
4. Чему равно напряжение источника, если его внутреннее сопротивление $r = 4$ Ом?

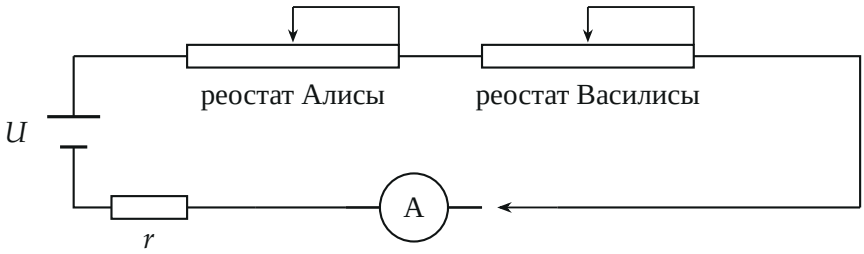


Рисунок к задаче: схема цепи (рисунка в условии нет). Движок каждого реостата соединён проводом с его правым концом, так что в цепи работает участок от левого конца до движка: сопротивление реостата пропорционально положению движка

▲ **Решение. Что происходит.** Реостаты и амперметр включены последовательно с источником, так что ток один, и он определяется общим сопротивлением цепи: $I = U/R_{\text{общ}}$. Ток вернулся к прежнему значению I_0 — значит, общее сопротивление вернулось к прежнему. Сопротивление реостата пропорционально положению ползунка (длине участка провода от конца до ползунка), поэтому изменения положений ползунков связаны линейно: Алиса сдвинула ползунок на Δx_A, Василиса должна сдвинуть на Δx_B так, чтобы $k_A\Delta x_A + k_B\Delta x_B = 0$, где k_A, k_B — сопротивления реостатов на единицу длины. Они различны: найдём их отношение из данного хода, потом выясним пределы реостатов.

Обозначения. x_A, x_B — положения ползунков в сантиметрах от середины своих реостатов (вправо — положительно); k_A, k_B — Ом на сантиметр у реостатов Алисы и Василисы; сопротивление реостата растёт вправо (направление определено условием: сдвиг вправо у Алисы уменьшил ток, сдвиг влево у Василисы его вернул). Ограничения: $|x_A| \le L_A/2 = 18$ см, $|x_B| \le L_B/2 = 20$ см. $R_0 = U/I_0$ — общее сопротивление цепи в начале игры (с источником r).

1. Закон Ома для всей цепи. $I_0 = U/R_0$. При сдвиге ползунка Алисы вправо на $\Delta x_A = 4$ см сопротивление выросло на $k_A\Delta x_A$:

$$I_1 = \frac{U}{R_0 + k_A\Delta x_A} \;\Rightarrow\; \frac{I_0}{I_1} = \frac{R_0 + 4k_A}{R_0} = \frac{100}{90} \;\Rightarrow\; 4k_A = \frac{R_0}{9}.$$

Ток вернулся к I_0, значит, сопротивление реостата Василисы уменьшилось ровно на столько: $k_B \cdot 5 = k_A \cdot 4$, то есть

$$k_B = \frac{4}{5}k_A = 0{,}8\,k_A.$$

Общее условие неизменности тока: $k_A x_A + k_B x_B = 0$, откуда $x_B = -1{,}25\,x_A$ и $x_A = -0{,}8\,x_B$ в любой момент игры, когда ток равен I_0 (в

начале $x_A = x_B = 0$).

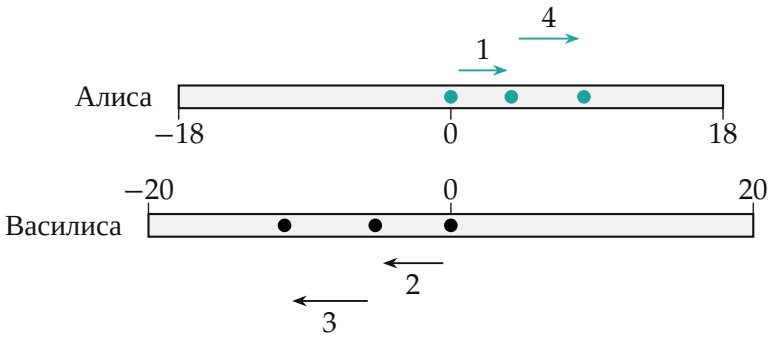


Рис. 2. Ходы игры на шкалах ползунков (числа — сантиметры от середины). Номера над стрелками — порядок ходов: 1) Алиса вправо на 4; 2) Василиса влево на 5; 3) Василиса влево ещё на 6; 4) Алиса вправо до 8,8

Пункт 1. Ответ Алисы. После ходов 1 и 2 ползунки стоят в $x_A = 4$ см и $x_B = -5$ см. Василиса сдвигает ползунок ещё на 6 см влево: $x_B = -5 - 6 = -11$ см. Ток прежний, значит,

$$x_A = -0{,}8\, x_B = 0{,}8 \cdot 11 = 8{,}8 \text{ см}.$$

Алиса сейчас на 4 см, её нужно 8,8: сдвиг $8{,}8 - 4 = 4{,}8$ см *вправо* (ползунок остаётся внутри реостата: $8{,}8 < 18$).

Обратите внимание: ответ — сдвиг, а не новое положение: положение 8,8 см отсчитывается от середины, а сдвиг — от текущего места (4 см). Путать их — типичная ошибка.

Пункт 2. Может ли Алиса не ответить? Ей нужно $x_A = -0{,}8\, x_B$. Василиса не может уйти дальше $|x_B| = 20$ см, и тогда $|x_A| = 0{,}8 \cdot 20 = 16$ см < 18 см: нужное положение всегда лежит внутри реостата Алисы. Значит, *нет*, такой ситуации не будет. Равносильно: наибольшее сопротивление реостата Василисы $k_B L_B = 0{,}8k_A \cdot 40 = 32k_A$ меньше, чем Алисы, $k_A L_A = 36k_A$, поэтому реостат Алисы перекрывает все изменения сопротивления, которые может создать Василиса.

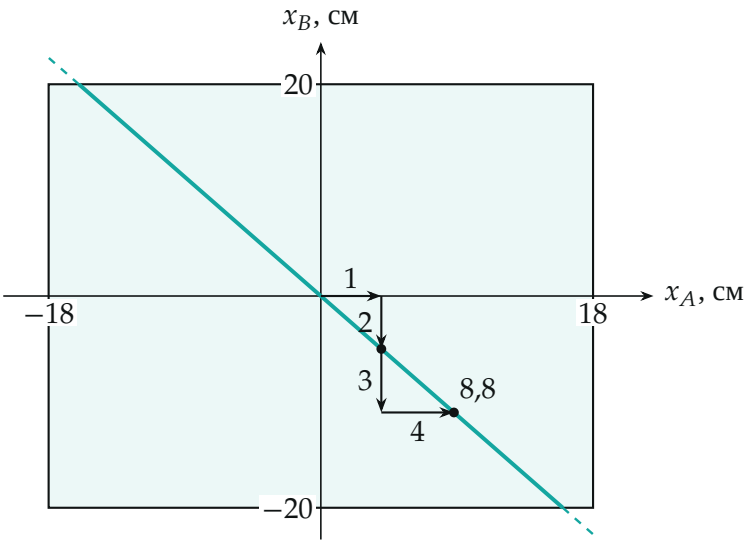


Рис. 3. Допустимые положения: связь $x_B = -1{,}25\,x_A$ (бирюзовая линия) и границы реостатов (прямоугольник). Ходы 1–4 из пункта 1. Линия выходит из прямоугольника по $x_B = \pm 20$ при $|x_A| = 16$ см, а по x_A — нет

Пункт 3. Может ли Василиса не ответить? Ей нужно $x_B = -1{,}25\,x_A$. Если Алиса сдвинет ползунок так, что $|x_A| > 16$ см (допустимо до 18 см), то $|x_B| > 1{,}25 \cdot 16 = 20$ см: ползунок Василисы нужного положения не достигает. Например, при $x_A = 17$ см нужно $x_B = -21{,}25$ см, а реостат даёт только -20 см. Значит, *да*, такая ситуация возможна (на рис. 3 — пунктир за пределами прямоугольника).

Пункт 4. Напряжение. Сопротивление всей цепи в начале игры (ползунки посередине, из реостатов в цепи половины):

$$R_0 = r + \frac{k_A L_A}{2} + \frac{k_B L_B}{2} = r + 18k_A + 0{,}8 \cdot 20\,k_A = r + 34k_A.$$

Из пункта 1: $4k_A = R_0/9$, то есть $R_0 = 36k_A$. Приравняем:

$$36k_A = r + 34k_A \;\Rightarrow\; k_A = \frac{r}{2} = 2\ \frac{\text{Ом}}{\text{см}}, \qquad R_0 = 36k_A = 72\ \text{Ом}.$$

Закон Ома для всей цепи при $I_0 = 0{,}1$ А:

$$U = I_0 R_0 = 0{,}1 \cdot 72 = 7{,}2 \text{ В}.$$

Проверка. Сопротивления: реостат Алисы в середине $18 \cdot 2 = 36$ Ом, Василисы $20 \cdot 1{,}6 = 32$ Ом, источника 4 Ом, итого 72 Ом. После хода 1: $72 + 4 \cdot 2 = 80$ Ом, $I_1 = 7{,}2/80 = 0{,}09$ А $= 90$ мА. После хода 2: $80 - 5 \cdot 1{,}6 = 72$ Ом. После хода 3 и ответа Алисы: Василиса $x_B = -11$: $32 - 11 \cdot 1{,}6 = 14{,}4$ Ом, Алиса $x_A = 8{,}8$: $36 + 8{,}8 \cdot 2 = 53{,}6$ Ом, итого $4 + 14{,}4 + 53{,}6 = 72$ Ом.

Ответ. 1) Алиса должна сдвинуть ползунок вправо на 4,8 см; 2) не может; 3) может; 4) $U = 7{,}2$ В.