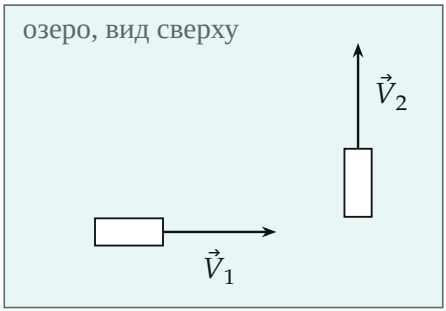
Анемометры на двух баржах

Задача 1. [МОШ 2016/17, 10 класс, задача 1] Две самоходные баржи равномерно движутся по озеру во взаимно перпендикулярных направлениях. Скорость одной баржи $V_1 = 3$ м/с, а другой $V_2 = 4$ м/с. На каждой барже установлен анемометр — прибор для измерения модуля скорости ветра. В течение некоторого времени на каждом из кораблей каждую минуту снимают показания анемометров. По результатам измерений обнаружилось, что значения скорости ветра, полученные на первой барже, не превышали скорости баржи V_1, а на второй — не превышали V_2. Какого максимального значения могла достигать скорость ветра относительно озера во время измерений? Какой угол α составляла скорость первой баржи $\vec{V}_1$ с направлением ветра в момент, когда скорость ветра относительно озера была максимальной?



Поясняющий рисунок: баржи идут под прямым углом друг к другу

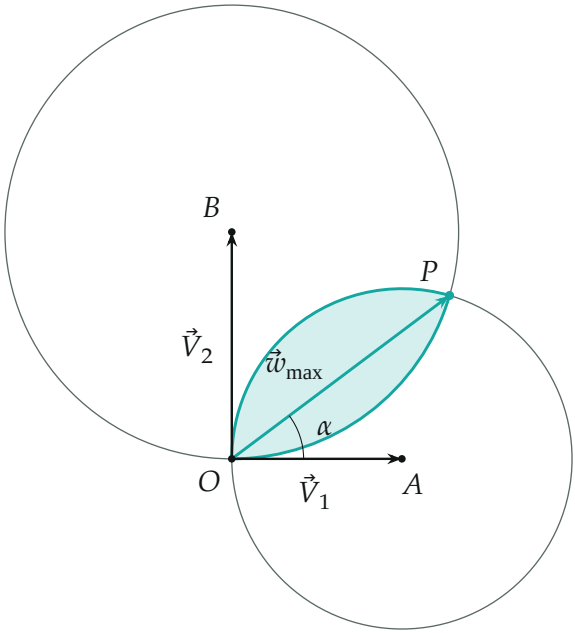
▲ **Решение. Что происходит.** Анемометр баржи показывает модуль скорости ветра *относительно баржи*, а нужна скорость $\vec{w}$ ветра относительно озера. Связывает их закон сложения скоростей. Ветер мог меняться от измерения к измерению, поэтому условие нужно выполнить в каждый момент, и вопрос звучит так: где может лежать конец вектора $\vec{w}$ и какая из этих точек дальше всех от начала. Класс задачи: относительность движения; векторы рисуем из одной точки и ищем самую далёкую точку области.

Обозначения. $\vec{w}$ — скорость ветра относительно озера, $\vec{w}_1, \vec{w}_2$ — скорости ветра относительно первой и второй барж, $\vec{V}_1 \perp \vec{V}_2$ — скорости барж относительно озера (озеро неподвижно).

1. Закон сложения скоростей. Скорость ветра относительно озера равна скорости ветра относительно баржи плюс скорость баржи относительно озера: $\vec{w} = \vec{w}_1 + \vec{V}_1 = \vec{w}_2 + \vec{V}_2$. Анемометры показывают модули $w_1 = |\vec{w} - \vec{V}_1|$ и $w_2 = |\vec{w} - \vec{V}_2|$, и в каждый момент измерения

$$|\vec{w} - \vec{V}_1| \le V_1, \qquad |\vec{w} - \vec{V}_2| \le V_2.$$

2. Область, где может лежать конец вектора $\vec{w}$. Отложим из одной точки O векторы $\vec{V}_1 = \overrightarrow{OA}$ и $\vec{V}_2 = \overrightarrow{OB}$ под прямым углом и вектор $\vec{w} = \overrightarrow{OX}$. Тогда $|\vec{w} - \vec{V}_1| = AX$ — расстояние от точки X до конца A вектора $\vec{V}_1$. Условие $AX \le V_1 = OA$ означает: точка X лежит в круге радиуса V_1 с центром в A. Круг проходит через O, потому что $OA = V_1$. Так же второе условие $BX \le V_2 = OB$ даёт круг радиуса V_2 с центром в B, и он тоже проходит через O. Возможные концы $\vec{w}$ — общая часть двух кругов («линза»), закрашенная на рисунке.

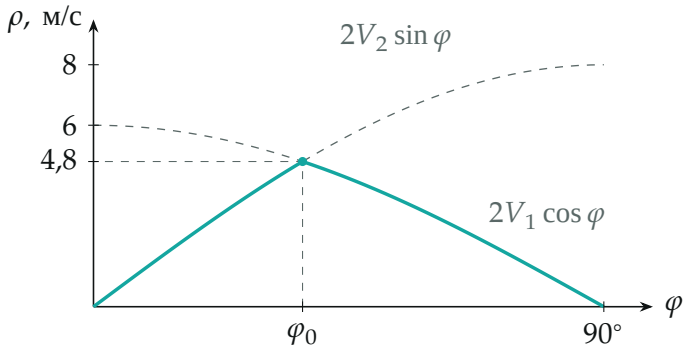


Круги, ограничивающие конец вектора $\vec{w}$; общая часть закрашена, $\vec{w}_{\max} = \overrightarrow{OP}$ — самый длинный вектор в ней

3. Самая далёкая от O точка линзы. Опишем точки обоих кругов в полярных координатах: начало в O, угол φ отсчитываем от вектора $\vec{V}_1$. Из точки O под углом φ идёт отрезок до границы первого круга. Он — основание равнобедренного треугольника с боковыми сторонами V_1 (центр A, точка O и точка границы) и углами при основании φ, поэтому его длина равна $2V_1 \cos\varphi$. Для второго круга угол отсчёта от $\vec{V}_2$ равен $90° - \varphi$, и длина отрезка до границы равна $2V_2 \sin\varphi$. Линза в направлении φ тянется от O до ближайшей из двух границ:

$$w \le \rho(\varphi) = \min\left(2V_1 \cos\varphi,\ 2V_2 \sin\varphi\right).$$

Первая функция с ростом φ убывает, вторая растёт, поэтому минимум из них наибольший там, где они равны, — это видно на графике.



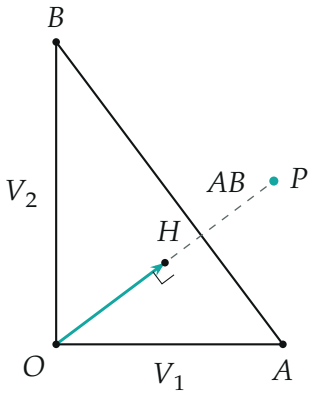
Длина линзы в направлении φ (сплошная бирюзовая линия) и её наибольшее значение при φ_0

Равенство $2V_1 \cos\varphi_0 = 2V_2 \sin\varphi_0$ даёт $\operatorname{tg}\varphi_0 = V_1/V_2$, то есть $\cos\varphi_0 = V_2/\sqrt{V_1^2 + V_2^2}$. Подставим в первую функцию:

$$w_{\max} = 2V_1 \cos\varphi_0 = \frac{2V_1V_2}{\sqrt{V_1^2 + V_2^2}} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{5} = 4{,}8 \text{ м/с}.$$

Угол между $\vec{V}_1$ и направлением ветра в этот момент — это $\alpha = \varphi_0 = \arccos \dfrac{V_2}{\sqrt{V_1^2 + V_2^2}} = \arccos \dfrac{4}{5} \approx 37°$.

4. Второй способ — геометрия. Точка P — вторая общая точка двух кругов, а общая хорда двух окружностей перпендикулярна линии центров AB. Значит, P — отражение точки O от прямой AB, и $OP = 2OH$, где OH — высота прямоугольного треугольника OAB из прямого угла. Высота равна произведению катетов, делённому на гипотенузу $AB = \sqrt{V_1^2 + V_2^2}$.



Точка P симметрична O относительно AB

Тогда $OP = 2\dfrac{V_1 V_2}{\sqrt{V_1^2 + V_2^2}}$ — то же значение, а угол $\alpha = \angle AOP = 90° - \angle OAB$ с $\cos\alpha = \sin\angle OAB = V_2/\sqrt{V_1^2 + V_2^2}$.

Проверка. Размерность: $V_1 V_2/\sqrt{V_1^2 + V_2^2}$ — м/с. Предел: если $V_2 \to \infty$, то $w_{\max} \to 2V_1$ — линза превращается в весь первый круг, а самая далёкая его точка — на диаметре $2V_1$ вдоль $\vec{V}_1$, и $\alpha \to 0$; в формуле $\cos\alpha = V_2/\sqrt{V_1^2 + V_2^2} \to 1$. При $V_1 = V_2$ линза симметрична, $\alpha = 45°$, $w_{\max} = \sqrt{2}\,V$.

Ответ. $w_{\max} = \dfrac{2V_1 V_2}{\sqrt{V_1^2 + V_2^2}} = 4{,}8$ м/с; $\alpha = \arccos \dfrac{4}{5} \approx 37°$.