Доска и брусок с гирьками

Задача 2. [МОШ 2016/17, 10 класс, задача 2] На горизонтальном столе лежит доска массой $m_1 = 1$ кг, на которой находится брусок массой $m_2 = 2$ кг. К бруску привязана лёгкая нерастяжимая нить, второй конец которой перекинут через идеальный блок, закреплённый на краю доски. Коэффициент трения между доской и бруском $\mu = 0{,}2$. Вертикальный участок нити начинают аккуратно нагружать одинаковыми гирьками массами $\Delta m = 75$ г каждая. При каком минимальном количестве n гирек система придёт в движение? Найдите модули и направления ускорений, с которыми в этом случае начнут двигаться доска и брусок. Трением между доской и поверхностью стола можно пренебречь, модуль ускорения свободного падения можно принять равным $g = 10$ м/с^2.

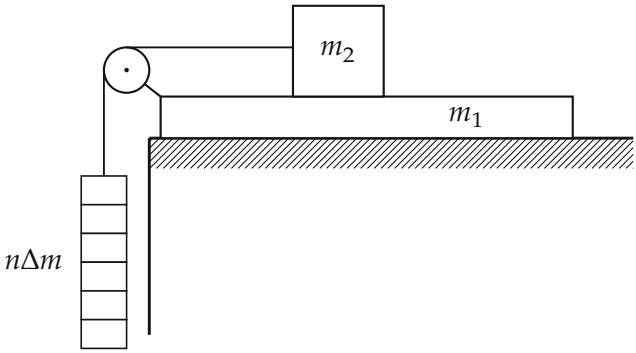


Рисунок условия: доска, брусок, блок на краю доски и гирьки на нити

▲ **Решение. Что происходит.** Гирьки тянут нить, нить тянет брусок влево. Пока трение покоя между бруском и доской справляется, ничего не движется. Когда натяжение превысит наибольшее трение покоя, брусок поедет влево *по доске*, а доска, которую трение тянет за бруском, а нить за блок — вправо, поедет в противоположную сторону. Нить нерастяжима, поэтому ускорения доски, бруска и гирек связаны. Класс задачи: тела со связью и трением — второй закон Ньютона для каждого тела плюс кинематическая связь.

Обозначения. $M = n\Delta m$ — масса всех гирек; T — сила натяжения нити (нить лёгкая, блок идеальный, поэтому по обе стороны от блока

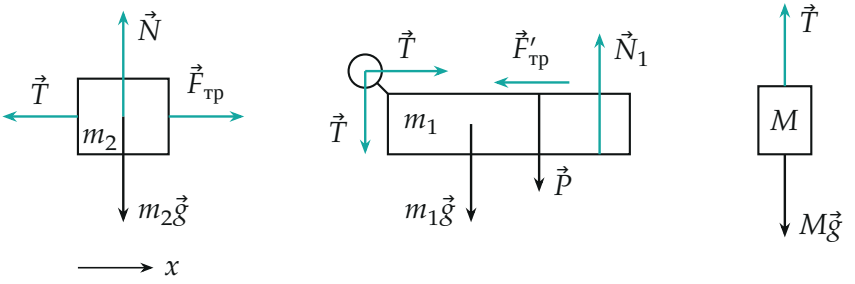
она одинакова); F — сила трения между бруском и доской; ось x направим вправо, вдоль стола; a_1, a_2 — проекции ускорений доски и бруска на x, a_w — ускорение гирек вниз.

1. Когда начнётся движение. Пока всё неподвижно, гирьки в равновесии: $T = Mg$; горизонтальные силы на брусок уравновешены: нить тянет влево с силой T, трение покоя F — вправо, $F = T = n\Delta m\, g$. Трение покоя не может быть больше μN, где $N = m_2 g$ — сила реакции доски на брусок (по вертикали брусок покоится). Тогда система остаётся в покое при

$$n\Delta m\, g \le \mu m_2 g \quad \Longleftrightarrow \quad n\Delta m \le \mu m_2 = 0{,}4 \text{ кг} \quad \Longleftrightarrow \quad n \le 5{,}3.$$

Сдвинуться доска и брусок *вместе* не могут: если брусок не скользит по доске, нить не может проходить через блок, а значит, и гирьки не могут опускаться. Поэтому движение начинается ровно тогда, когда брусок начинает проскальзывать по доске. При $n = 5$ имеем $5\Delta m = 0{,}375$ кг $< 0{,}4$ кг — покой, при $n = 6$ имеем $6\Delta m = 0{,}45$ кг $> 0{,}4$ кг — движение. Минимальное число гирек $n = 6$.

2. Силы и законы для каждого тела. Теперь $M = 6\Delta m = 0{,}45$ кг и брусок скользит влево *относительно доски*, значит, трение на брусок действует вправо и равно $\mu m_2 g$, а на доску — влево (третий закон Ньютона). Нить тянет брусок влево, а блок, закреплённый на доске, — вправо: горизонтальный участок нити тянет блок к бруску. Вертикальный участок нити тянет блок вниз, но по горизонтали на доску не действует.



Силы на брусок, на доску с блоком и на гирьки (вид сбоку; $F'_{тр}$ — трение со стороны бруска на доску)

Второй закон Ньютона в проекциях на ось x для бруска (нить влево, трение вправо), для доски (нить через блок вправо, трение от бруска влево) и в проекции на вертикаль вниз для гирек:

$$m_2a_2 = -T + \mu m_2 g, \qquad m_1a_1 = T - \mu m_2 g, \qquad Ma_w = Mg - T.$$

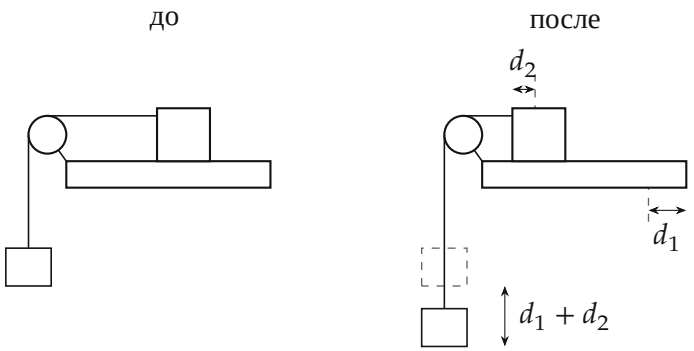
Сложим первые два уравнения: правые части сократятся. Это закон сохранения импульса системы «доска + брусок», на которую по горизонтали внешние силы не действуют:

$$m_1a_1 + m_2a_2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad a_2 = -\frac{m_1}{m_2}a_1.$$

Доска и брусок разгоняются в противоположные стороны, причём более лёгкая доска — быстрее.

3. Кинематическая связь. Пусть за малое время доска вместе с блоком сместилась вправо на d_1, а брусок влево относительно стола на d_2. Горизонтальный участок нити — от блока до бруска — укоротился на $d_1 + d_2$. Нить нерастяжима, значит, вертикальный участок удлинился на столько же: гирьки опустились на $d_1 + d_2$ (небольшим сносом гирек вместе с блоком вбок пренебрегаем). Поэтому

$$a_w = a_1 - a_2 = a_1\left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right).$$



Смещения за малое время: доска вправо на d_1, брусок влево на d_2, гирьки

вниз на $d_1 + d_2$

4. Решаем систему. Из третьего уравнения $T = M(g - a_w) = M\left[g - a_1\left(1 + \dfrac{m_1}{m_2}\right)\right]$. Подставим в уравнение доски:

$$m_1 a_1 = Mg - Ma_1\left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right) - \mu m_2 g \implies a_1 = \frac{(M - \mu m_2)\, g}{m_1 + M + Mm_1/m_2}.$$

Числа: $M - \mu m_2 = 0{,}05$ кг, знаменатель $m_1 + M + Mm_1/m_2 = 1 + 0{,}45 + 0{,}225 = 1{,}675$ кг, поэтому

$$a_1 = \frac{0{,}05 \cdot 10}{1{,}675} \approx 0{,}30 \text{ м/с}^2, \qquad a_2 = -\frac{m_1}{m_2} a_1 = -\frac{1}{2} a_1 \approx -0{,}15 \text{ м/с}^2.$$

Знаки: $a_1 > 0$ — доска разгоняется *вправо*, $a_2 < 0$ — брусок *влево*. Гирьки опускаются с ускорением $a_w = 1{,}5a_1 \approx 0{,}45$ м/с^2, натяжение $T = M(g - a_w) \approx 4{,}3$ Н.

Проверка. Доска: $m_1 a_1 = 0{,}30$ Н, а $T - \mu m_2 g = 4{,}30 - 4{,}00 = 0{,}30$ Н — сходится. Предел $M \to \mu m_2$: $a_1 \to 0$ — движение только начинается, как и должно быть. Предел $M \to \infty$: $a_1 \to \dfrac{m_2}{m_1 + m_2} g$, $a_w \to g$ — гирьки падают свободно.

В ответе организаторов для бруска стоит 0,17 м/с^2 — это опечатка: их же формула и закон сохранения импульса дают 0,15 м/с^2.

Ответ. Минимальное число гирек $n = 6$. Доска движется вправо с ускорением $a_1 = \dfrac{1 - \mu m_2/M}{1 + m_1/m_2 + m_1/M}\, g \approx 0{,}3$ м/с^2, где $M = 6\Delta m$; брусок — влево с ускорением $|a_2| = \dfrac{m_1}{m_2} a_1 \approx 0{,}15$ м/с^2.