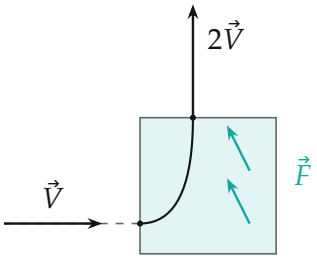
Сила на частицу и работа

Задача 3. [МОШ 2016/17, 10 класс, задача 3] Частица массой m, свободно летящая со скоростью V, попадает в область пространства, в которой в течение времени $\tau = 1$ с на неё действует постоянная по модулю и направлению сила $\vec{F}$. К моменту прекращения действия этой силы частица движется со скоростью $2V$ в направлении, перпендикулярном первоначальному. Какое время потребовалось бы такой же по модулю и направлению силе, чтобы совершить над частицей вдвое большую работу (при той же начальной скорости частицы)? Влиянием других сил пренебречь.



Поясняющий рисунок: траектория частицы в области действия силы $\vec{F}$; на выходе скорость $2V$ перпендикулярна начальной

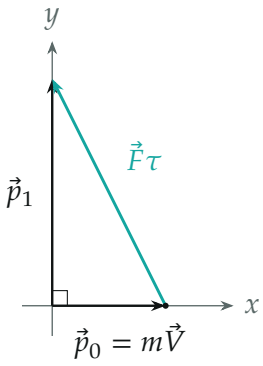
▲ **Решение. Что происходит.** Сила постоянна и действует на частицу заданное время, поэтому изменение импульса частицы равно $\vec{F}t$ и растёт пропорционально t. Работа силы равна изменению кинетической энергии, а кинетическая энергия определяется длиной вектора импульса. Главная идея — следить за концом вектора импульса: он движется по прямой с постоянной скоростью, а нам нужна точка этой прямой, где длина вектора $\sqrt{7}\,mV$.

Обозначения. $\vec{p}_0 = m\vec{V}$ — начальный импульс; $\vec{p}_1$ — импульс после первого опыта ($t = \tau$), $|\vec{p}_1| = 2mV$, $\vec{p}_1 \perp \vec{p}_0$; $\vec{p}_2$ — импульс после второго опыта (за время t); $s = t/\tau$.

1. Первый опыт: импульс силы. Второй закон Ньютона в импульсной форме для частицы: $\vec{p}_1 - \vec{p}_0 = \vec{F}\tau$ (сила постоянна). Векторы $\vec{p}_0$ и $\vec{p}_1$

перпендикулярны, поэтому $\vec{F}\tau$ — гипотенуза прямоугольного треугольника с катетами mV и $2mV$:

$$F\tau = \sqrt{(mV)^2 + (2mV)^2} = \sqrt{5}\,mV.$$



Первый опыт в импульсах: $\vec{p}_0 + \vec{F}\tau = \vec{p}_1$

Работа силы в первом опыте равна приращению кинетической энергии:

$$A_1 = \frac{m(2V)^2}{2} - \frac{mV^2}{2} = \frac{3}{2}\,mV^2.$$

2. Второй опыт: какая скорость нужна. Работа должна быть вдвое больше, $A_2 = 2A_1 = 3mV^2$. Теорема о кинетической энергии для второго опыта:

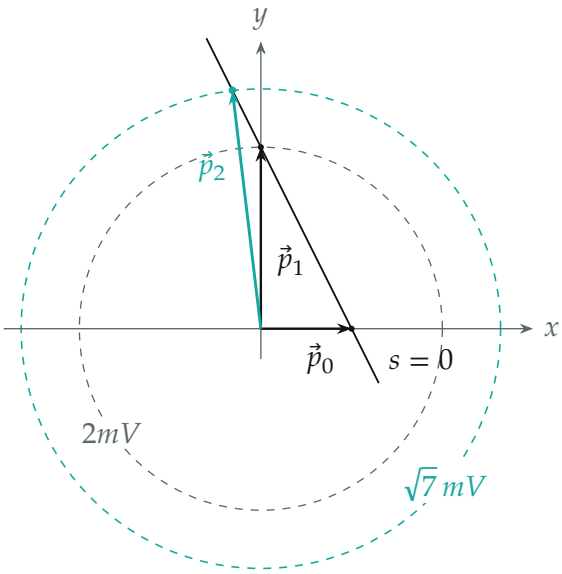
$$\frac{mv_2^2}{2} - \frac{mV^2}{2} = 3mV^2 \quad\Longrightarrow\quad v_2^2 = 7V^2, \qquad p_2 = \sqrt{7}\,mV.$$

3. Импульс за время t. Сила та же, поэтому за время t импульс получает приращение $\vec{F}t = s\vec{F}\tau$, где $s = t/\tau$. Конец вектора импульса движется по прямой:

$$\vec{p}(s) = \vec{p}_0 + s\vec{F}\tau.$$

Требуется найти s, при котором $|\vec{p}| = \sqrt{7}\,mV$. Конец вектора лежит на пересечении этой прямой с окружностью радиуса $\sqrt{7}\,mV$ с центром в начале координат. При $s = 1$ длина равна $2mV$ (внутри окружности),

и по мере роста s конец вектора выходит наружу — нужное s больше единицы.



Конец вектора $\vec{p}(s)$ идёт по прямой, $s = 1$ — первый опыт, $s = t/\tau$ — второй; пунктиры — окружности радиусов $2mV$ и $\sqrt{7}\,mV$

4. Решение. Введём оси: x вдоль $\vec{p}_0$, y вдоль $\vec{p}_1$ — тогда $\vec{F}\tau$ имеет проекции $(-mV;\ 2mV)$, и

$$p_x = mV(1-s), \qquad p_y = 2mVs.$$

Условие $p_x^2 + p_y^2 = 7m^2V^2$ даёт

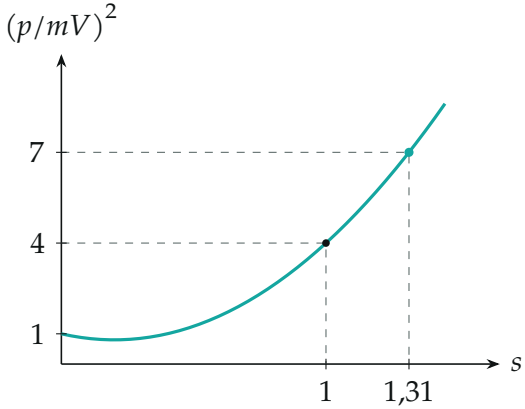
$$(1-s)^2 + 4s^2 = 7 \implies 5s^2 - 2s - 6 = 0 \implies s = \frac{1 \pm \sqrt{31}}{5}.$$

Нужен положительный корень (сила действует в течение времени $t > 0$):

$$s = \frac{1+\sqrt{31}}{5} \approx 1{,}31, \qquad t = s\,\tau = \frac{1+\sqrt{31}}{5}\,\tau \approx 1{,}3\ \text{с}.$$

Отрицательный корень $s \approx -0{,}91$ — вторая точка пересечения прямой с окружностью, она соответствует времени «до» входа в область.

Те же уравнения без векторного рисунка получаются из проекций скорости: $v_x = V(1-s)$, $v_y = 2Vs$, и энергия $v_x^2 + v_y^2 = 7V^2$ — это тот же квадратный трёхчлен. Его удобно видеть на графике: $p^2/(mV)^2 = 5s^2 - 2s + 1$ при $s = 1$ равно 4, а нужное значение 7 достигается при $s > 1$.



Квадрат импульса как функция времени действия силы

Проверка. Размерность: s безразмерно. Подставим: $(1-1{,}31)^2 + 4 \cdot 1{,}31^2 = 0{,}098 + 6{,}90 \approx 7$ — верно. Знак: $t > \tau$, и это разумно: работа выросла вдвое, а скорость растёт не пропорционально времени — скорость увеличилась с $2V$ лишь до $\sqrt{7}V \approx 2{,}65V$, поэтому добавка к времени всего 31 %, а не вдвое.

Обратите внимание: удвоение работы *не* означает удвоения времени: работа пропорциональна квадрату скорости, а скорость при такой ориентации силы растёт по закону $v^2 = (1-s)^2 + 4s^2$ в единицах V^2.

Ответ. $t = \dfrac{1+\sqrt{31}}{5}\,\tau \approx 1{,}3$ с.