Кислород в p–T–m-ограничениях

Задача 4. [МОШ 2016/17, 10 класс, задача 4] Кислород находится в специальном устройстве, которое обеспечивает ограничение на возможные значения объёма, давления p, температуры T и массы m газа. Все возможные значения p, T и m, будучи нанесёнными на трёхмерную p–T–m-диаграмму (см. рис.), лежат внутри цилиндрической поверхности, ограниченной диапазонами изменения давления от 100 кПа до 300 кПа, массы от 1 г до 3 г и температуры от 100 K до 300 K. Найдите минимальное и максимальное значение, которое может принимать объём газа, и укажите значения p, T и m, которые соответствуют этим состояниям. Молярная масса кислорода $\mu = 32$ г/моль.

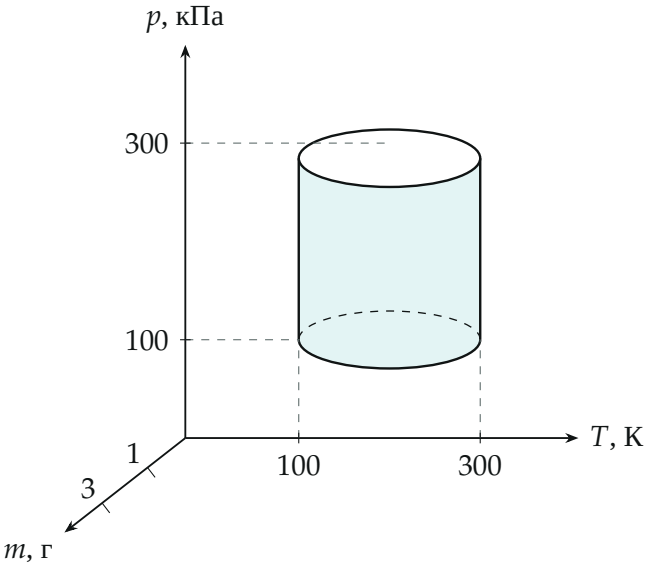


Рисунок условия (схематично): состояния газа лежат внутри цилиндра в осях p–T–m

▲ **Решение.** **Что происходит.** Класс задачи: экстремум функции нескольких ограниченных величин. В уравнение состояния давление входит отдельно, а масса и температура — только произведением mT;

поэтому давление берём крайним, а крайние mT ищем на круге в плоскости T–m.

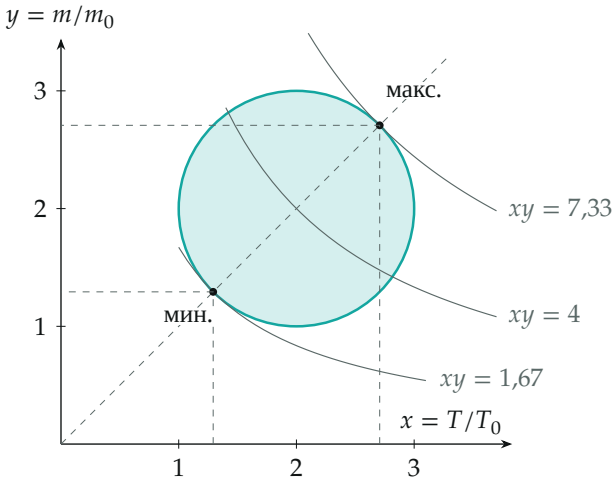
Обозначения. $m_0 = 1$ г, $T_0 = 100$ К, $x = T/T_0$, $y = m/m_0$ — безразмерные температура и масса; $R = 8{,}31$ Дж/(моль·К).

1. Уравнение состояния. Для m граммов кислорода (уравнение Менделеева — Клапейрона $pV = \dfrac{m}{\mu}RT$, применимо к идеальному газу в каждом состоянии) объём

$$V = \frac{mRT}{\mu p} = \frac{m_0 T_0 R}{\mu} \cdot \frac{xy}{p}.$$

Первый множитель — постоянная: $\dfrac{m_0 T_0 R}{\mu} = \dfrac{10^{-3} \cdot 100 \cdot 8{,}31}{0{,}032} \approx 26{,}0$ Дж. Давление и xy меняются независимо (цилиндр: любое p сочетается с любой допустимой парой T, m). Значит, V наибольший при *наименьшем* $p = 100$ кПа и *наибольшем* xy, а наименьший — при $p = 300$ кПа и наименьшем xy.

2. Область допустимых T и m. Сечение цилиндра плоскостью $p = \text{const}$ — круг: температура от 100 до 300 К, масса от 1 до 3 г. В переменных x, y это круг $(x-2)^2 + (y-2)^2 \le 1$ радиуса 1 с центром в точке $(2;\,2)$.

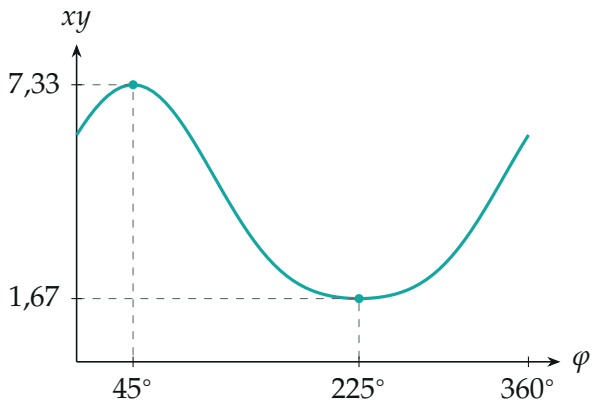


Круг допустимых (T, m) в безразмерных координатах; линии $xy = \text{const}$ — гиперболы

3. Экстремум произведения xy**.** Внутри круга $x, y > 0$, и произведение растёт с ростом любой из величин, поэтому его крайние значения лежат на окружности. Параметризуем её углом φ: $x = 2 + \cos\varphi$, $y = 2 + \sin\varphi$, тогда $xy = 4 + 2(\cos\varphi + \sin\varphi) + \sin\varphi\cos\varphi$. Введём $c = \cos\varphi + \sin\varphi = \sqrt{2}\cos(\varphi - 45^\circ)$; так как $c^2 = 1 + 2\sin\varphi\cos\varphi$, то $\sin\varphi\cos\varphi = \dfrac{c^2 - 1}{2}$ и

$$xy = \frac{c^2}{2} + 2c + \frac{7}{2}, \qquad -\sqrt{2} \le c \le \sqrt{2}.$$

Парабола по c с вершиной в $c = -2$, то есть левее допустимого отрезка, поэтому на всём отрезке функция *возрастает*: наименьшее значение — при $c = -\sqrt{2}$, наибольшее — при $c = +\sqrt{2}$.



Произведение xy вдоль окружности: наибольшее при $\varphi = 45^\circ$, наименьшее при $\varphi = 225^\circ$

Эти значения c достигаются при $\varphi = 45^\circ$ и $\varphi = 225^\circ$, то есть в точках

окружности на биссектрисе $y = x$ (пунктир на рис. 2). Подставим:

$$(xy)_{\max} = 1 + 2\sqrt{2} + \frac{7}{2} = \frac{9}{2} + 2\sqrt{2} = \left(2 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \approx 7{,}33,$$

$$(xy)_{\min} = 1 - 2\sqrt{2} + \frac{7}{2} = \frac{9}{2} - 2\sqrt{2} = \left(2 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \approx 1{,}67.$$

Соответственно $x = y = 2 \pm 1/\sqrt{2}$, то есть $T = (2 \pm 1/\sqrt{2})\,T_0$, $m = (2 \pm 1/\sqrt{2})\,m_0$.

Второй способ — геометрия: крайние гиперболы $xy = \text{const}$ касаются окружности, а из симметрии круга и гипербол относительно $y = x$ точки касания лежат на этой прямой (рис. 2).

4. Объёмы. Наибольший объём — при $p_{\min} = 100$ кПа, $T \approx 271$ К, $m \approx 2{,}71$ г, наименьший — при $p_{\max} = 300$ кПа, $T \approx 129$ К, $m \approx 1{,}29$ г:

$$V_{\max} = \frac{m_0 T_0 R}{\mu p_{\min}}\left(2 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \approx \frac{26{,}0 \cdot 7{,}33}{10^5}\ \text{м}^3 \approx 1{,}90\ \text{л},$$

$$V_{\min} = \frac{m_0 T_0 R}{\mu p_{\max}}\left(2 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \approx \frac{26{,}0 \cdot 1{,}67}{3 \cdot 10^5}\ \text{м}^3 \approx 0{,}145\ \text{л}.$$

Обратите внимание: самое большое T и самая большая m вместе не достигаются — точка $(T_{\max}; m_{\max}) = (3; 3)$ в единицах T_0, m_0 лежит вне круга (расстояние от центра $\sqrt{2} > 1$).

Проверка. Размерность: $mTR/(\mu p)$ — (г·Дж/моль)/((г/моль)·Па) = Дж/Па = м^3. Предел: если радиус круга уменьшить до нуля, обе крайние точки сольются в центр $T = 200$ К, $m = 2$ г.

Ответ. $V_{\min} = \dfrac{(2 - 1/\sqrt{2})^2 m_0 T_0 R}{\mu p_{\max}} \approx 0{,}145$ л — при $p = 300$ кПа, $T \approx 129$ К, $m \approx 1{,}29$ г;

$V_{\max} = \dfrac{(2 + 1/\sqrt{2})^2 m_0 T_0 R}{\mu p_{\min}} \approx 1{,}90$ л — при $p = 100$ кПа, $T \approx 271$ К, $m \approx 2{,}71$ г.