Проволочная сетка между A и B

Задача 5. [МОШ 2016/17, 10 класс, задача 5] Определите сопротивление R_{AB} между точками A и B проволочной сетки, показанной на рисунке. Сопротивление каждого из проводников (вне зависимости от его длины), из которых спаяна сетка, равно R. Места спайки проводников обозначены точками. В центре сетки электрический контакт отсутствует.

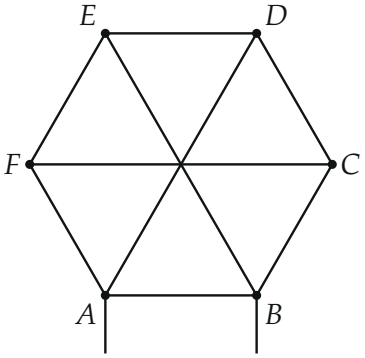


Рисунок условия; вершины обозначены буквами по ходу против часовой стрелки

▲ **Решение. Что происходит.** Сетка — шесть сторон правильного шестиугольника и три его большие диагонали. Диагонали пересекаются в центре, но контакта там нет, поэтому каждая диагональ — один резистор R между противоположными вершинами, и всего в схеме девять резисторов. Схема симметрична относительно вертикальной оси, проходящей через середину AB. Это даёт связь потенциалов, после которой остаются два неизвестных, и они находятся из закона сохранения заряда в узлах (первое правило Кирхгофа). Класс задачи: цепь с симметрией; второй способ — эквивалентная схема по равным потенциалам.

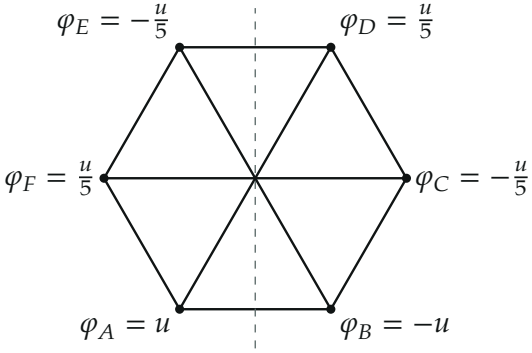
Обозначения. Вершины против часовой стрелки: A, B — нижние, затем C (справа), D, E (верхние), F (слева). Резисторы: стороны AB, BC, CD, DE, EF, FA и диагонали AD, BE, CF. φ — потенциалы узлов, u — потенциал точки A при выбранном нуле потенциала.

1. Симметрия. Отражение относительно вертикальной оси переставляет $A \leftrightarrow B$, $F \leftrightarrow C$, $E \leftrightarrow D$ и переводит диагонали друг в друга

($AD \leftrightarrow BE$, CF в себя). Схема переходит в себя. Если сверх того поменять знаки всех потенциалов, то условие — «A имеет потенциал u, B — потенциал $-u$» — тоже переходит в себя. Решение задачи единственно, значит, потенциал каждого узла равен потенциалу зеркального узла с обратным знаком: за нуль примем потенциал середины AB, тогда

$$\varphi_A = u, \quad \varphi_B = -u, \qquad \varphi_F = a, \ \varphi_C = -a, \qquad \varphi_E = b, \ \varphi_D = -b.$$

Неизвестных осталось два — a и b (через u).



Потенциалы узлов, выбор нуля — на оси симметрии

2. Закон сохранения заряда в узлах F и E. К узлам F и E не подключены источники, поэтому сумма токов, вытекающих из узла по трём резисторам, равна нулю (первое правило Кирхгофа). Ток по резистору R между узлами равен разности потенциалов, делённой на R. Узел F соединён с A, E и (диагональю) с C:

$$\frac{a-u}{R} + \frac{a-b}{R} + \frac{a-(-a)}{R} = 0 \implies 4a - b = u.$$

Узел E соединён с F, D и (диагональю) с B:

$$\frac{b-a}{R} + \frac{b-(-b)}{R} + \frac{b-(-u)}{R} = 0 \implies 4b - a = -u.$$

Сложим уравнения: $3(a+b)=0$, то есть $b=-a$; тогда $5a=u$:

$$a=\frac{u}{5},\quad b=-\frac{u}{5},\qquad \varphi_F=\varphi_D=\frac{u}{5},\quad \varphi_C=\varphi_E=-\frac{u}{5}.$$

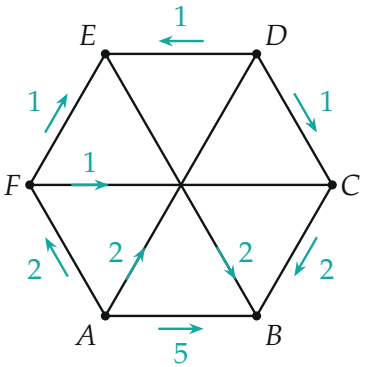
Потенциалы D и F равны, и потенциалы C и E равны — запомним это для второго способа.

3. Общий ток и сопротивление. Ток, вытекающий из точки A в сетку, — сумма токов по трём резисторам AB, AF и AD:

$$I=\frac{u-(-u)}{R}+\frac{u-u/5}{R}+\frac{u-u/5}{R}=\frac{2u}{R}+\frac{8u}{5R}=\frac{18u}{5R}.$$

Напряжение между A и B равно $\varphi_A-\varphi_B=2u$, поэтому

$$R_{AB}=\frac{2u}{I}=\frac{2u\cdot 5R}{18u}=\frac{5}{9}R.$$

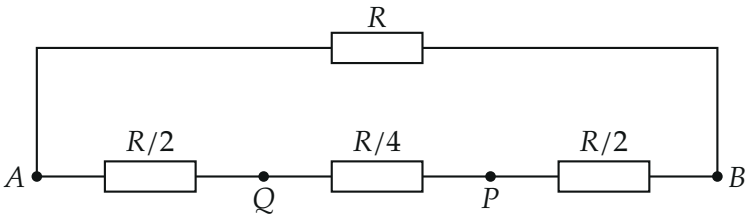


Токи в резисторах в единицах $I_1=\dfrac{2u}{5R}$; $I=9I_1$

4. Второй способ — эквивалентная схема. Узлы с равными потенциалами можно соединить проводом: ток по нему не пойдёт, и распределение токов не изменится. Соединим C с E (узел P) и D с F (узел Q). Тогда:

- между A и Q — два параллельных резистора (FA и AD): $R/2$;
- между B и P — два параллельных резистора (BC и BE): $R/2$;

- между P и Q — четыре параллельных резистора (CD, DE, EF, CF): $R/4$;
- между A и B напрямую — резистор AB: R.



Эквивалентная схема: нижняя ветвь из трёх участков параллельна резистору AB

Нижняя ветвь — три последовательных участка: $\frac{R}{2}+\frac{R}{4}+\frac{R}{2}=\frac{5R}{4}$. Она параллельна резистору AB:

$$R_{AB}=\frac{R\cdot\frac{5R}{4}}{R+\frac{5R}{4}}=\frac{\frac{5}{4}}{\frac{9}{4}}R=\frac{5}{9}R,$$

тот же результат.

Обратите внимание: равенство потенциалов C и E (а также D и F) *не видно* из рисунка — эти узлы не лежат на оси симметрии и не зеркальны друг другу. Оно получается из совместного решения уравнений узлов; нельзя «замкнуть» их, не доказав.

Проверка. Сумма токов в узле F: втекает $\frac{4u}{5R}$, вытекает $\frac{2u}{5R}+\frac{2u}{5R}$ — верно (то же в D, E, C — см. рис. 3). Мощность: сумма I^2R по резисторам в единицах I_1: $5^2+4\cdot2^2+4\cdot1^2=45$, то есть $45\,I_1^2R=\frac{45\cdot4u^2}{25R}=\frac{36u^2}{5R}$; произведение $2u\cdot I=2u\cdot\frac{18u}{5R}=\frac{36u^2}{5R}$ — совпало. Грубая оценка: $R_{AB}<R$, так как есть другие пути параллельно AB, и $\frac{5}{9}R\approx0{,}56R$ это не противоречит.

Ответ. $R_{AB}=\frac{5}{9}R$.