Букашка на падающем стержне

Задача 6. [МОШ 2016/17, 10 класс, задача 6] Жёсткий стержень AB длиной L лежит на горизонтальном полу, придвинутый одним из своих концов вплотную к вертикальной стене, как показано на рисунке. В точке A сидит букашка. В тот момент, когда конец A стержня начали двигать вверх вдоль стены с постоянной по модулю скоростью V, букашка поползла по стержню с постоянной относительно стержня скоростью u в направлении конца B, который скользит по полу, не отрываясь от него. Найдите максимальное расстояние S от стенки до букашки в процессе её движения по стержню.

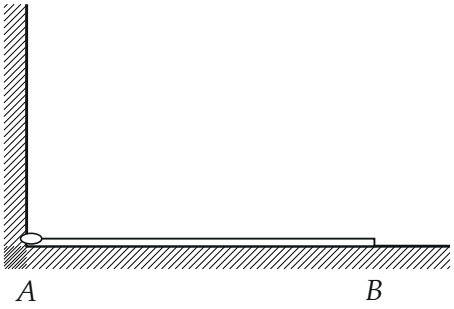


Рисунок условия: стержень лежит на полу, конец A у стены, на нём букашка

▲ **Решение.** **Что происходит.** Конец A поднимается по стене, стержень всё круче, а его нижний конец B скользит по полу к стене. Букашка ползёт от A к B и одновременно *поворачивается вместе со стержнем*: чем круче стержень, тем меньше горизонтальная проекция пройденного ею пути. Расстояние от стены — это горизонтальная проекция отрезка AC от A до букашки, поэтому сначала оно растёт, пока стержень пологий, а потом убывает. Нужен максимум по времени. Главная идея — записать расстояние как функцию угла наклона и найти максимум; затем проверить, успевает ли букашка до него добраться (она ограничена длиной стержня L).

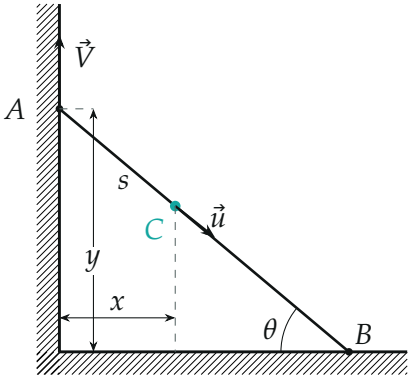
Обозначения. t — время от начала движения; $y = Vt$ — высота конца A над полом; θ — угол стержня с полом; $s = ut$ — расстояние, прой-

денное букашкой по стержню от A (скорость u постоянна относительно стержня); x — расстояние от стены до букашки.

1. Связь угла со временем. Концы стержня — на стене в точке A на высоте $y = Vt$ и на полу в точке B. Из прямоугольного треугольника «стена — пол — стержень» (гипотенуза L):

$$\sin\theta = \frac{y}{L} = \frac{Vt}{L}.$$

Угол растёт от 0 до 90°, когда конец A достигает высоты L.



Стержень в произвольный момент: $y = Vt$, $s = ut$, x — расстояние от стены до букашки C

2. Расстояние от стены. Конец A лежит на стене, $x_A = 0$. Букашка сместилась от него на s вдоль стержня в сторону B; стержень наклонён под углом θ к горизонту, поэтому горизонтальная проекция этого смещения равна $s\cos\theta$:

$$x = s\cos\theta = ut\cos\theta.$$

Выразим время через угол: $t = \dfrac{L\sin\theta}{V}$. Тогда

$$x = \frac{uL}{V}\sin\theta\cos\theta = \frac{uL}{2V}\sin 2\theta.$$

Наибольшее значение синуса — единица, она достигается при $2\theta = 90°$,

то есть $\theta = 45°$:

$$x_{\max} = \frac{uL}{2V} \quad \text{при } \theta = 45°.$$

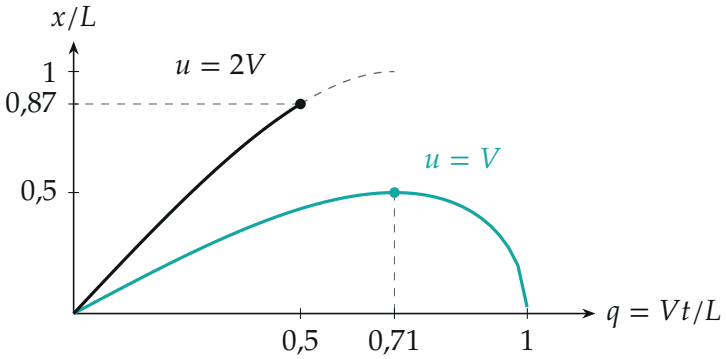
3. Успевает ли букашка. Формула $x = s\cos\theta$ верна, пока букашка на стержне, то есть $s \le L$. Угол $45°$ наступит в момент $t_* = \dfrac{L\sin 45°}{V} = \dfrac{L}{\sqrt{2}\,V}$; к этому моменту букашка пройдёт $s_* = ut_* = \dfrac{uL}{\sqrt{2}\,V}$. Она успевает, если $s_* \le L$:

$$\frac{u}{\sqrt{2}\,V} \le 1 \quad \Longleftrightarrow \quad u \le \sqrt{2}\,V.$$

При $u \le \sqrt{2}V$ максимум достигается внутри движения: $S = \dfrac{uL}{2V} = \dfrac{u}{V}\cdot\dfrac{L}{2}$.

Если $u > \sqrt{2}V$, то букашка доползёт до B раньше, чем угол станет равным $45°$: в момент $t_1 = L/u$ имеем $s = L$ и $\sin\theta_1 = \dfrac{Vt_1}{L} = \dfrac{V}{u} < \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. До этого момента угол меньше $45°$ и расстояние $x \sim \sin 2\theta$ растёт, так что наибольшее значение — в момент прихода в B:

$$S = L\cos\theta_1 = L\sqrt{1-\sin^2\theta_1} = L\sqrt{1-\frac{V^2}{u^2}}.$$



Расстояние от стены в долях L; $q = \sin\theta$. Пунктир — продолжение, которого нет: при $u = 2V$ букашка уходит со стержня в точке B

4. Второй способ — скорости. Разложим горизонтальную скорость букашки: $\dot{x} = \dfrac{d}{dt}(s\cos\theta) = u\cos\theta - s\sin\theta\,\dot{\theta}$. Первое слагаемое — проекция скорости вдоль стержня; второе — вращение стержня, которое приближает букашку к стене. Из $\sin\theta = Vt/L$ имеем $\cos\theta\,\dot{\theta} = V/L$, поэтому

$$s\sin\theta\,\dot{\theta} = ut\sin\theta\,\frac{V}{L\cos\theta} = u\,\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta},$$

$$\dot{x} = u\,\frac{\cos^2\theta - \sin^2\theta}{\cos\theta} = \frac{u\cos 2\theta}{\cos\theta}.$$

Скорость сближения со стеной меняет знак при $\theta = 45°$: до этого $\dot{x} > 0$, после — $\dot{x} < 0$. Тот же максимум.

Обратите внимание: формула $S = uL/(2V)$ годится только при $u \le \sqrt{2}\,V$. При большей скорости букашка покинет стержень до того, как угол станет равным 45°, а при $u > 2V$ формула дала бы $S > L$ — расстояние, большее длины стержня.

Проверка. Размерность: u/V безразмерно, $S \sim L$. На границе $u = \sqrt{2}V$ обе формулы дают одно значение: $\dfrac{\sqrt{2}}{2}L = \dfrac{L}{\sqrt{2}}$ и $L\sqrt{1-\frac{1}{2}} = \dfrac{L}{\sqrt{2}}$. Предел $V \to 0$ (стержень почти не поднимается): $S \to L$ — букашка проползает всё лежащее на полу бревно до B, и вторая формула даёт именно это. Предел $u \to 0$: $S \to 0$ — букашка никуда не уйдёт от стены.

Ответ. $S = \dfrac{u}{V}\cdot\dfrac{L}{2}$ при $u \le \sqrt{2}\,V$; $\quad S = L\sqrt{1-\left(\dfrac{V}{u}\right)^2}$ при $u \ge \sqrt{2}\,V$.