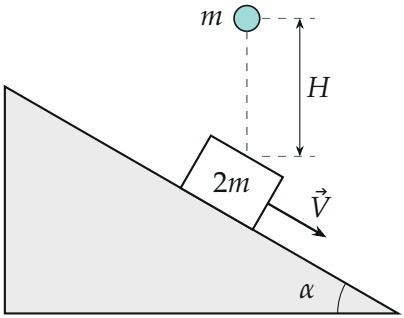
Пластилин падает на брусок

Задача 7. [МОШ 2016/17, 10 класс, задача 7] По закреплённой наклонной плоскости, составляющей угол α с горизонтом, скользил брусок массой $2m$, двигаясь с постоянной скоростью V. Сверху без начальной скорости отпустили кусок пластилина массой m. Пролетев расстояние H, пластилин упал на брусок и прилип к нему. Какое количество теплоты выделилось за время соударения? Сопротивление воздуха пренебрежимо мало.



Поясняющий рисунок: пластилин падает с высоты H на брусок, скользящий вниз по наклонной плоскости

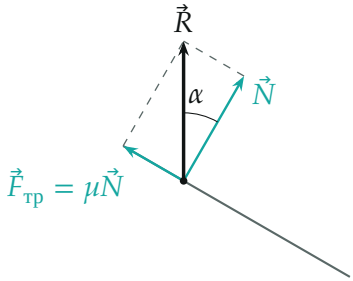
▲ **Решение. Что происходит.** Пластилин падает вертикально, брусок скользит вдоль наклона, и они сталкиваются неупруго — слипаются. Удар очень короткий, поэтому внешняя сила тяжести за время удара не успевает изменить импульс системы; но на брусок действует и наклонная плоскость, причём ударная часть её силы — и нормальная реакция, и трение. Главная идея — заметить, что сила реакции плоскости при ударе направлена строго вертикально, поэтому сохраняется *горизонтальная* проекция импульса. Класс задачи: неупругий удар с внешними связями; теплота равна потере механической энергии.

Обозначения. $v = \sqrt{2gH}$ — скорость пластилина перед ударом (вертикально вниз); u — скорость слипшихся тел сразу после удара (они движутся вдоль плоскости); μ — коэффициент трения бруска о плоскость; N — нормальная реакция плоскости; ось x — горизонталь, ось y — вертикаль вверх.

1. Коэффициент трения. Брусок скользит с постоянной скоростью, поэтому сумма сил на него равна нулю. Вдоль плоскости: $2mg\sin\alpha = \mu N$, перпендикулярно: $N = 2mg\cos\alpha$. Отсюда

$$\mu = \operatorname{tg}\alpha.$$

2. Какая сила действует со стороны плоскости при ударе. Во время удара тело продолжает скользить по плоскости, поэтому сила трения скольжения по-прежнему равна μN — но теперь N намного больше (ударная сила). Нормальная реакция направлена перпендикулярно плоскости, трение — вдоль неё, вверх по склону. Их равнодействующая $\vec{R}$ составляет с нормалью угол φ, где $\operatorname{tg}\varphi = \mu = \operatorname{tg}\alpha$, то есть $\varphi = \alpha$. Нормаль отклонена от вертикали на тот же угол α — значит, $\vec{R}$ направлена *вертикально вверх*.



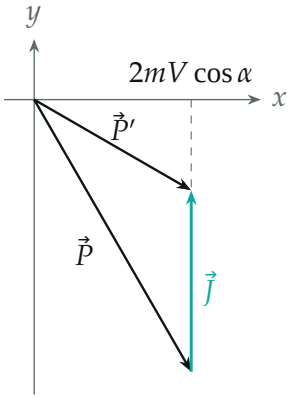
Силы со стороны плоскости на брусок при ударе: нормальная реакция $\vec{N}$ и трение $\vec{F}_{тр}$ вдоль плоскости; их сумма вертикальна

Теперь запишем импульс системы «брусок + пластилин» за время удара $\Delta t \to 0$. Сила тяжести даёт добавку $3mg\,\Delta t \to 0$, равнодействующая $\vec{R}$ вертикальна, а её проекция на горизонталь равна нулю. Значит, *горизонтальная проекция импульса системы при ударе сохраняется*.

3. Скорость после удара. До удара горизонтальную составляющую имеет только импульс бруска: скорость бруска V направлена вдоль наклона вниз, её горизонтальная проекция $V\cos\alpha$; у пластилина скорость вертикальна. После удара тело массой $3m$ движется по плоскости (вдоль неё — плоскость не пускает вглубь), и его скорость u имеет горизонталь-

ную проекцию $u\cos\alpha$:

$$2mV\cos\alpha + m\cdot 0 = 3mu\cos\alpha \quad\Longrightarrow\quad u = \frac{2}{3}V.$$



Импульс системы до удара ($\vec{P}$) и после ($\vec{P}'$) для $\alpha = 30°$, $v = 2V$; их разность — импульс силы $\vec{J}$ — вертикальна

4. Энергия. Теплота, выделившаяся при ударе, равна убыли механической энергии. За время удара тела смещаются пренебрежимо мало, поэтому потенциальная энергия не меняется, и учитываем только кинетическую. До удара

$$E_1 = \frac{2mV^2}{2} + \frac{mv^2}{2} = mV^2 + mgH,$$

после удара

$$E_2 = \frac{3mu^2}{2} = \frac{3m}{2}\cdot\frac{4V^2}{9} = \frac{2}{3}mV^2.$$

Теплота:

$$Q = E_1 - E_2 = mgH + mV^2 - \frac{2}{3}mV^2 = m\left(gH + \frac{V^2}{3}\right).$$

Второй способ — проекции на плоскость и нормаль. Нормальная составляющая скорости пластилина $v\cos\alpha$ гасится импульсом нормаль-

ной реакции $J_N = mv\cos\alpha$; импульс трения вдоль плоскости вверх равен $\mu J_N = mv\sin\alpha$. Проекция импульса на направление вниз по склону: до удара $2mV + mv\sin\alpha$, после $3mu$. Импульс трения вычитается:

$$2mV + mv\sin\alpha - mv\sin\alpha = 3mu \quad\Longrightarrow\quad u = \frac{2}{3}V,$$

тот же результат: проекция скорости пластилина на плоскость как раз гасится трением.

Обратите внимание: сохранять импульс вдоль плоскости, не учитывая силу трения, было бы ошибкой — при ударе трение тоже ударное ($F = \mu N$ с огромным N), и именно его импульс равен проекции импульса пластилина. Это работает только потому, что брусок скользил равномерно ($\mu = \operatorname{tg}\alpha$).

Проверка. Размерность: gH и V^2 — Дж/кг. Предел $H = 0$ (пластилин лишь касается бруска): $Q = mV^2/3$. Это известная потеря при неупругом соударении бруска $2m$ со скоростью V с покоящимся телом m:

$$\frac{2m\cdot m}{2(2m+m)}V^2 = \frac{mV^2}{3}.$$

Предел $V \to 0$: $Q = mgH$ — вся кинетическая энергия пластилина переходит в теплоту: тело останавливается.

Ответ. $Q = m\left(gH + \dfrac{V^2}{3}\right)$.