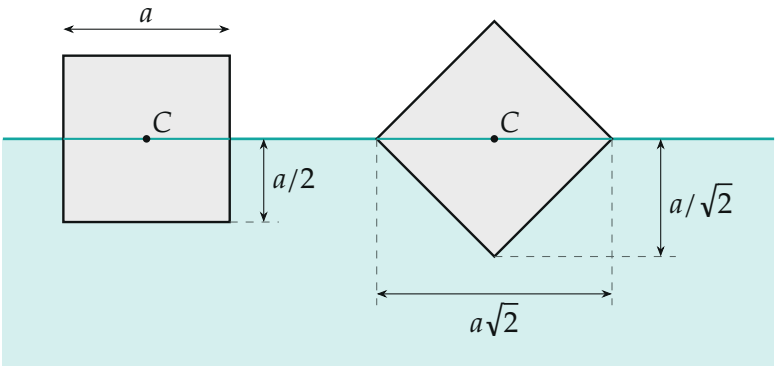
Брусок поворачивается в воде

Задача 8. [МОШ 2016/17, 10 класс, задача 8] Деревянный брусок плотностью $\rho = 500$ кг/м^3 в форме прямоугольного параллелепипеда имеет длину $L = 1$ м и квадратное поперечное сечение со стороной $a = 10$ см. Брусок опустили в воду большого озера и удерживали его в таком неустойчивом положении равновесия, что одна из длинных граней бруска была сухой и горизонтальной, при этом половина объёма бруска была погружена в воду. Брусок отпустили, и он принял устойчивое положение, повернувшись вокруг своей оси симметрии на угол 45°. На сколько в результате этого уменьшилась потенциальная энергия системы «вода + брусок»? Плотность воды равна 2ρ.



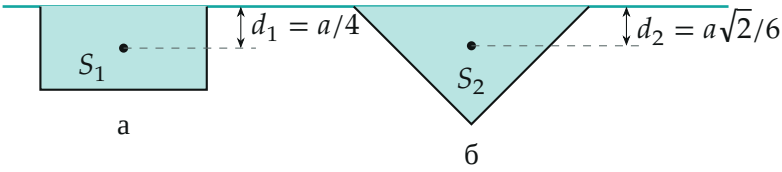
Поясняющий рисунок: поперечное сечение бруска до и после поворота; уровень воды обозначен линией, C — центр масс бруска

▲ **Решение. Что происходит.** Плотность бруска вдвое меньше плотности воды, поэтому в равновесии под водой ровно половина его объёма. Сечение — квадрат, и любая прямая, проведённая через его центр, делит его площадь пополам. Значит, при любом повороте брусок остаётся наполовину погружённым, если уровень воды проходит через центр сечения: центр масс бруска при повороте не смещается и всё время лежит на уровне воды. Меняется только форма погружённой части, а вместе с

ней — потенциальная энергия *воды*, потому что брусок «занимает место» воды на разной глубине. Класс задачи: потенциальная энергия системы с жидкостью; считаем её как энергию воды, из которой «вынули» объём погружённой части.

Обозначения. $\rho_w = 2\rho$ — плотность воды; z — координата вверх от уровня воды; S_1 — сечение погружённой части в начальном положении, S_2 — в конечном; d_1, d_2 — глубины центров масс этих сечений; $A = a^2/2$ — площадь любого из них.

1. Положения равновесия и центр масс. Брусок плавает: сила тяжести $\rho a^2 L g$ равна силе Архимеда $\rho_w g V_{\text{погр}}$, откуда $V_{\text{погр}} = \dfrac{\rho}{\rho_w} a^2 L = \dfrac{1}{2} a^2 L$ — половина объёма, как в условии. В обоих положениях уровень воды проходит через центр сечения: в первом — на половине высоты квадрата, во втором — по горизонтальной диагонали квадрата, повёрнутого на 45°. Поэтому центр масс бруска остаётся на уровне воды, и его потенциальная энергия не изменилась. Изменение энергии даёт только вода.



Погружённые части сечения S_1 (прямоугольник) и S_2 (треугольник) и глубины их центров масс

2. Энергия воды при погружённом теле. Озеро большое, уровень воды не меняется. Мысленно заменим воду с бруском на сплошную воду и «вынем» из неё объём погружённой части. Потенциальная энергия воды (в слое по длине бруска) равна

$$U_w = U_0 + \rho_w g L \left(-\int_S z\, dA\right) = U_0 + \rho_w g L\, A\, d,$$

где U_0 — энергия воды без бруска, d — глубина центра масс сечения S (для точек выемки $z < 0$, поэтому $-\int z\, dA = A\, d$). Площадь $A =$

$a^2/2$ в обоих положениях одинакова. Значит, изменение потенциальной энергии системы определяется только разностью глубин:

$$\Delta U = U_2 - U_1 = \rho_w g L A\,(d_2 - d_1).$$

Чем глубже центр погружённой части, тем больше энергия: воду из выемки как бы подняли на поверхность.

3. Глубины центров масс. В первом положении S_1 — прямоугольник $a \times \dfrac{a}{2}$, центр масс на половине его высоты: $d_1 = a/4$. Во втором S_2 — равнобедренный прямоугольный треугольник с основанием (вдоль уровня воды) $a\sqrt{2}$ и высотой $h = \dfrac{a\sqrt{2}}{2} = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$. Центр масс треугольника лежит на трети высоты от основания: $d_2 = \dfrac{h}{3} = \dfrac{a\sqrt{2}}{6} \approx 0{,}236\,a$. Площадь треугольника $\dfrac{1}{2}\,a\sqrt{2} \cdot \dfrac{a}{\sqrt{2}} = \dfrac{a^2}{2} = A$ — та же, условие половины объёма выполнено.

4. Изменение энергии. Подставим $\rho_w = 2\rho$, $A = \dfrac{a^2}{2}$:

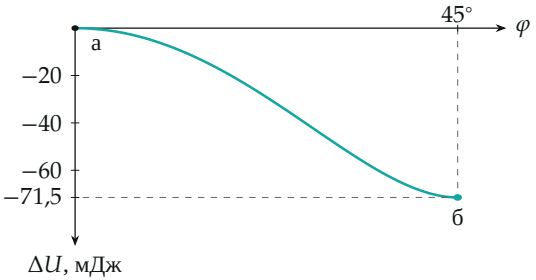
$$\Delta U = 2\rho g L \cdot \frac{a^2}{2}\left(\frac{a\sqrt{2}}{6} - \frac{a}{4}\right) = -\frac{\rho g L a^3}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{3}\right).$$

Числа ($g = 10$ м/с^2): $\rho g L a^3 = 500 \cdot 10 \cdot 1 \cdot 10^{-3} = 5$ Дж, а $\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{3} \approx 0{,}0286$, поэтому $\Delta U \approx -\dfrac{5}{2} \cdot 0{,}0286 \approx -7{,}15 \cdot 10^{-2}$ Дж. Знак минус: потенциальная энергия системы *уменьшилась* на 71,5 мДж.

5. Почему положение 45° устойчиво, а исходное — нет. При повороте на угол φ ($0 \le \varphi \le 45°$) погружённая половина сечения меняет форму; глубина её центра масс

$$d(\varphi) = a\left(\frac{\cos\varphi}{4} + \frac{\sin^2\varphi}{12\cos\varphi}\right)$$

(при $\varphi = 0$ это $a/4$, при $\varphi = 45°$ — $\dfrac{a}{3\sqrt{2}}$). Энергия $U(\varphi) = U_0 + \rho_w g L A d(\varphi)$ как функция угла показана на графике: при $\varphi = 0$ у кривой максимум — равновесие неустойчиво, при $\varphi = 45°$ — минимум, равновесие устойчиво.



Энергия системы в зависимости от угла поворота бруска (за нуль принята энергия при $\varphi = 0$)

Обратите внимание: энергия самого бруска не изменилась — вся убыль в воде, поэтому считать нужно всю систему.

Проверка. Размерность: $\rho g L a^3$ — (кг/м^3)(м/с^2)(м)(м^3) = Н·м = Дж. Оценка порядка: сдвиг глубины на $0{,}0143\,a \approx 1{,}4$ мм у слоя воды массой $\rho_w LA = 5$ кг даёт $5 \cdot 10 \cdot 1{,}4 \cdot 10^{-3} \approx 0{,}07$ Дж — сходится. Второй способ: формула $d(\varphi)$ из п. 5 даёт $d(0) = a/4$ и $d(45°) = a\left(\frac{\sqrt{2}}{8} + \frac{1}{12\sqrt{2}}\right) = \frac{a}{3\sqrt{2}}$ — те же глубины, что в п. 3.

Ответ. $\Delta U = -\dfrac{\rho g L a^3}{2}\left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{3}\right) \approx -71{,}5 \cdot 10^{-3}$ Дж: потенциальная энергия уменьшилась на 71,5 мДж.