Цикл с изотермой, максимум T

Задача 9. [МОШ 2016/17, 10 класс, задача 9] Один моль идеального одноатомного газа совершает замкнутый цикл, состоящий из изотермы 1–2 и процессов 2–3 и 3–1, в которых давление является линейной функцией объёма, как показано на рисунке. Известно, что в состояниях 1 и 2 давление газа равно p_1 и p_2 соответственно. При каких давлениях в состоянии 3 в нём достигается максимальная температура газа за весь цикл?

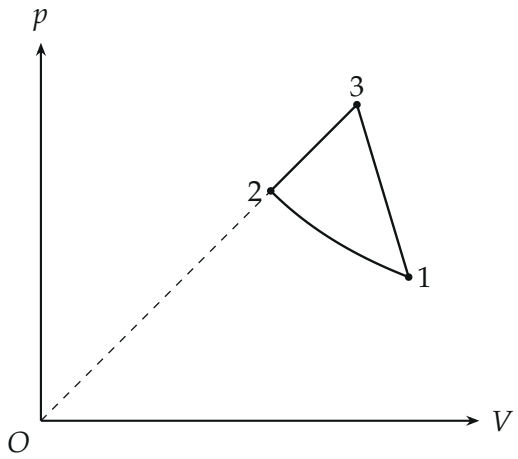


Рисунок условия: цикл 1–2–3 на диаграмме p–V; пунктир — прямая из начала координат через точку 2

▲ **Решение.** **Что происходит.** Для одного моля $T = pV/R$, поэтому температура растёт и падает вместе с произведением pV. На изотерме 1–2 температура постоянна. Прямая 2–3 продолжает пунктир из начала координат (см. рисунок): на ней $p = kV$, $pV = kV^2$ растёт с объёмом, значит, $T_3 > T_2 = T_1$. Остаётся прямая 3–1: температура на ней как функция объёма — парабола с одним максимумом. Точка 3 будет самой горячей в цикле, если от 3 к 1 температура только убывает, то есть вершина параболы лежит левее точки 3 (или в ней). Главная идея — найти, при каком p_3 так и есть. Класс задачи: линейный процесс и максимум температуры (касание гиперболы $pV = \text{const}$).

Обозначения. $k = p_2/V_2$ — коэффициент на прямой 2–3 ($p = kV$, и в точке 3 тоже $p_3 = kV_3$); $p = a - bV$ ($b > 0$) — уравнение прямой 3–1; V_4 — объём, при котором температура на этой прямой наибольшая.

1. Процесс 2–3 и изотерма. По рисунку $V_3 > V_2$, а на прямой $p = kV$ температура пропорциональна kV^2 и растёт: $T_3 > T_2$. Изотерма 1–2 даёт $p_1V_1 = p_2V_2$, поэтому

$$V_2 = \frac{p_2}{k}, \qquad V_3 = \frac{p_3}{k}, \qquad V_1 = \frac{p_2V_2}{p_1} = \frac{p_2^2}{kp_1}.$$

2. Где температура максимальна на прямой 3–1. Давление на прямой убывает с ростом объёма: $p = a - bV$. Температура пропорциональна

$$pV = aV - bV^2.$$

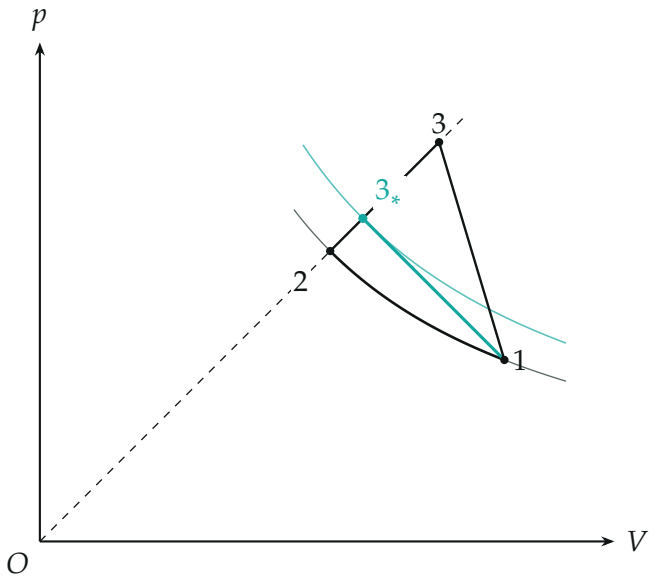
Это парабола ветвями вниз, вершина — при $V_4 = \dfrac{a}{2b}$ (там $p_4 = \dfrac{a}{2}$). Левее V_4 температура растёт с объёмом, правее убывает. От точки 3 к точке 1 объём растёт ($V_1 > V_3$). Температура на этом участке только убывает, и точка 3 — наибольшая на нём, если

$$V_4 \le V_3 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{a}{2b} \le V_3.$$

Прямая проходит через точку 3: $a = p_3 + bV_3$. Подставим:

$$p_3 + bV_3 \le 2bV_3 \quad \Longleftrightarrow \quad bV_3 \ge p_3 \quad \Longleftrightarrow \quad b \ge \frac{p_3}{V_3} = k.$$

Геометрический смысл: прямая 3–1 должна идти не положе, чем луч из начала координат через точку 3 (наклон k). Граничный случай $b = k$ — прямая 3–1 *касается* гиперболы $pV = \text{const}$ в точке 3: наклон гиперболы $dp/dV = -p/V = -k$ равен $-b$.



Граничный случай $p_3 = p_*$: прямая 1–3_* касается гиперболы $pV = \text{const}$ в точке 3_*. При $p_3 > p_*$ (точка 3) прямая 1–3 круче, и T убывает от 3 к 1

3. Наклон b через давления. Прямая проходит через точки 1 и 3:

$$b = \frac{p_3 - p_1}{V_1 - V_3} = k\,\frac{p_3 - p_1}{\dfrac{p_2^2}{p_1} - p_3}.$$

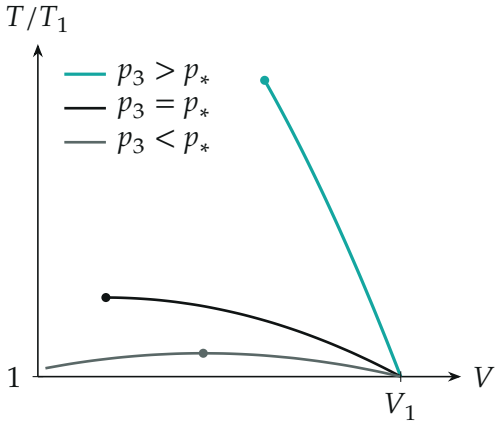
Знаменатель положителен, пока $V_3 < V_1$, то есть $p_3 < \dfrac{p_2^2}{p_1}$ (иначе точка 3 стояла бы правее точки 1, и цикл был бы другим). Условие $b \geq k$:

$$p_3 - p_1 \geq \frac{p_2^2}{p_1} - p_3 \quad\Longrightarrow\quad 2p_3 \geq p_1 + \frac{p_2^2}{p_1} \quad\Longrightarrow\quad p_3 \geq \frac{p_1^2 + p_2^2}{2p_1}.$$

Это критическое значение $p_* = \dfrac{p_1^2 + p_2^2}{2p_1}$.

4. Что при меньшем p_3. При $p_3 < p_*$ вершина параболы правее точки 3 ($V_4 > V_3$): от точки 3 температура сначала *растёт* до точки 4 внутри

прямой 3–1, и максимум цикла там. На графике — температура вдоль 3–1 при $p_1 = 1$, $p_2 = 1{,}6$ (условные единицы), $p_* = 1{,}78$:



Температура вдоль прямой 3–1 в долях T_1: при $p_3 > p_*$ убывает от точки 3; при $p_3 = p_*$ в точке 3 касательная горизонтальна; при $p_3 < p_*$ максимум внутри отрезка

Обратите внимание: сверху p_3 ограничено условием $p_3 < p_2^2/p_1$ (точка 3 левее точки 1). Промежуток $\dfrac{p_1^2+p_2^2}{2p_1} \le p_3 < \dfrac{p_2^2}{p_1}$ непуст, потому что $\dfrac{p_1^2+p_2^2}{2p_1} < \dfrac{p_2^2}{p_1} \Leftrightarrow p_1 < p_2$, как на рисунке.

Проверка. Размерность: p_* — давление. Предел $p_1 \to p_2$ (изотерма сжимается в точку): $p_* \to p_2$, и точка 3 лишь не ниже точки 2 — верно. Числа ($p_1 = 1$, $p_2 = 1{,}6$): $p_* = \dfrac{1+2{,}56}{2} = 1{,}78$; при $p_3 = 1{,}78$ получается $b = 1 = k$, прямая касается гиперболы, как на рис. 2. Численный перебор по V на прямой 3–1 (python): для $p_3 = 2{,}2$ наибольшая температура в точке 3, для $p_3 = 1{,}62$ — внутри отрезка ($V_4 \approx 2{,}04$, $T_4/T_1 \approx 1{,}07$).

Ответ. $p_3 \ge \dfrac{p_1^2+p_2^2}{2p_1}$.