Три вольтметра и две батареи

Задача 10. [МОШ 2016/17, 10 класс, задача 10] Электрическая цепь, схема которой изображена на рисунке, собрана из двух батарей с ЭДС $U_1 = 36$ В и $U_2 = 12$ В, а также трёх вольтметров. Сопротивление у одного из этих приборов в два раза меньше, чем у каждого из двух других. При этом сопротивление у каждого из вольтметров всё равно значительно больше внутреннего сопротивления каждой батареи. Известно, что один из вольтметров показывает напряжение 24 В.

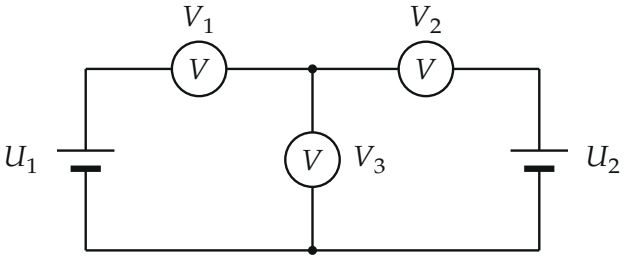
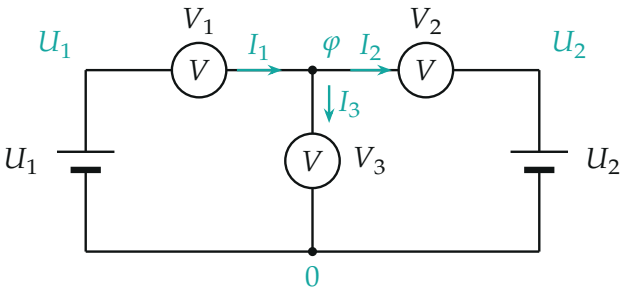


Рисунок условия; вольтметры занумерованы: V_1 — слева вверху, V_2 — справа вверху, V_3 — средний

1. Какой именно вольтметр показывает 24 В?
2. Что показывают остальные вольтметры?
3. Определите, где включен вольтметр с малым сопротивлением, а где — вольтметры с большим сопротивлением.

▲ **Решение. Что происходит.** Вольтметр — это резистор с большим сопротивлением r, а его показание — модуль напряжения на нём, $|\Delta\varphi| = Ir$. Внутренние сопротивления батарей много меньше r, поэтому батареи можно считать идеальными: напряжение на каждой равно её ЭДС. Три вольтметра соединены в «звезду» вокруг среднего узла, и надо найти его потенциал. Какой вольтметр имеет вдвое меньшее сопротивление, неизвестно: перебираем три случая и в каждом смотрим, есть ли показание 24 В. Класс задачи: перебор состояний, в каждом — закон сохранения заряда в узле (первое правило Кирхгофа).

Обозначения. Потенциал нижнего провода равен нулю. Значки у батарей на рисунке: длинная тонкая пластина — плюс, она сверху у обеих батарей, поэтому потенциал левого верхнего угла равен U_1, правого верхнего U_2. φ — потенциал среднего узла (в нём сходятся V_1, V_2, V_3; нумерация в условии не указана, считаем V_1 левым верхним, V_2 — правым верхним, V_3 — средним, тогда ответ совпадает с ответом организаторов); g_1, g_2, g_3 — проводимости (обратные сопротивления) вольтметров; I_1, I_2, I_3 — токи через них в указанных стрелками направлениях.



Потенциалы узлов и токи; I_1 идёт от левого верхнего угла к среднему узлу, I_2 — от среднего узла к правому верхнему углу, I_3 — от среднего узла к нижнему проводу

1. Токи через вольтметры. Ток через вольтметр равен разности потенциалов на нём, делённой на его сопротивление, то есть умноженной на проводимость:

$$I_1 = g_1(U_1 - \varphi), \qquad I_2 = g_2(\varphi - U_2), \qquad I_3 = g_3\,\varphi.$$

В среднем узле заряд не накапливается: сумма втекающих токов равна сумме вытекающих, $I_1 = I_2 + I_3$ (первое правило Кирхгофа):

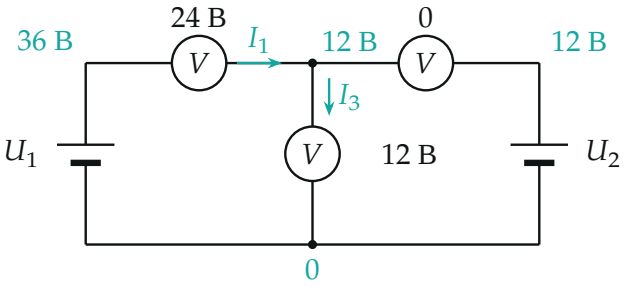
$$g_1(U_1 - \varphi) = g_2(\varphi - U_2) + g_3\varphi \quad \Longrightarrow \quad \varphi = \frac{g_1U_1 + g_2U_2}{g_1 + g_2 + g_3}.$$

Показания вольтметров: $|U_1 - \varphi|$, $|\varphi - U_2|$, φ (вольтметр V_3 стоит между средним узлом и нижним проводом).

2. Перебор: какой вольтметр имеет малое сопротивление. Малое сопротивление — вдвое большая проводимость. Положим две проводимости равными g, одну — $2g$; общий множитель g в формуле для φ сокращается. Подставим $U_1 = 36$ В, $U_2 = 12$ В:

- Малое сопротивление у V_1 ($g_1 = 2g$): $\varphi = \dfrac{2 \cdot 36 + 12}{4} = 21$ В; показания $V_1 = 36 - 21 = 15$ В, $V_2 = 21 - 12 = 9$ В, $V_3 = 21$ В.
- Малое сопротивление у V_2 ($g_2 = 2g$): $\varphi = \dfrac{36 + 2 \cdot 12}{4} = 15$ В; показания $V_1 = 21$ В, $V_2 = 15 - 12 = 3$ В, $V_3 = 15$ В.
- Малое сопротивление у V_3 ($g_3 = 2g$): $\varphi = \dfrac{36 + 12}{4} = 12$ В; показания $V_1 = 24$ В, $V_2 = 0$, $V_3 = 12$ В.

Показание 24 В есть только в третьем случае, значит, два других не подходят.



Решение: потенциалы узлов и показания вольтметров; ток через V_2 равен нулю, $I_1 = I_3$

3. Ответы на вопросы. Малое сопротивление имеет *третий* (средний) вольтметр, большое — первый и второй. Тогда $\varphi = 12$ В, и:

1. 24 В показывает первый вольтметр V_1 (слева вверху): $U_1 - \varphi = 36 - 12 = 24$ В;
2. второй вольтметр V_2 показывает 0 (его концы на одном потенциале 12 В, ток через него не идёт: $I_2 = 0$), третий V_3 — 12 В;
3. малое сопротивление — у V_3 (в средней ветви), большие — у V_1 и V_2.

Обратите внимание: ноль на втором вольтметре — не «прибор сломан», а равенство потенциалов его концов: правый верхний угол и средний узел оба имеют потенциал 12 В. Ток течёт только по контуру «U_1 — V_1 — V_3».

Проверка. Закон сохранения заряда в среднем узле: $I_1 = g \cdot 24$ В, $I_3 = 2g \cdot 12$ В$= g \cdot 24$ В, $I_2 = 0$; $I_1 = I_2 + I_3$ — верно. Напряжение на контуре правой батареи: $V_2 + V_3 = 0 + 12 = 12$ В $= U_2$ — верно; левый контур: $V_1 + V_3 = 24 + 12 = 36$ В $= U_1$ — верно. Ответ не зависит от абсолютных сопротивлений вольтметров, а только от их отношения: общий множитель g сократился.

Ответ. 1) 24 В показывает первый (левый верхний) вольтметр; 2) второй (правый верхний) вольтметр показывает 0 В, третий (средний) — 12 В; 3) малое сопротивление имеет третий вольтметр, а первый и второй имеют большие сопротивления.