Мячик между балконом и землёй

Задача 1. [МОШ 2016/17, 11 класс, задача 1] Петя бросил мячик с балкона с начальной скоростью V стоящему на земле Васе. Через время $t_1 = 2{,}21$ с Вася поймал мячик, заметив, что в конце полета скорость мячика была направлена перпендикулярно его начальной скорости в момент броска, совершенного Петей. Затем Вася сделал несколько шагов, остановился и бросил мячик обратно на балкон Пете, сообщив мячику такую же по модулю начальную скорость V. Петя поймал мячик через время $t_2 = 1{,}72$ с, заметив, что конечная скорость мячика также направлена перпендикулярно начальной скорости мячика в момент броска, совершенного Васей. Определите разницу высот H между кистями рук Пети и Васи, а также определите, чему равен модуль скорости V. Сопротивлением воздуха можно пренебречь, модуль ускорения свободное падения считайте равным $g = 10$ м/с^2.

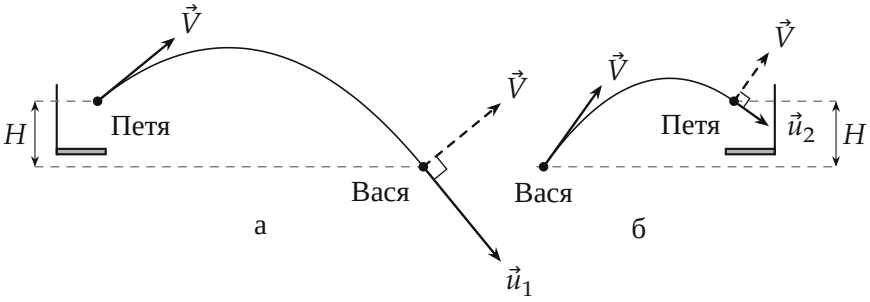


Рис. 1. Поясняющий рисунок: оба броска. Пунктиром — начальная скорость, перенесённая в точку, где мячик поймали; $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ — скорости в конце полёта. Углы между $\vec{V}$ и $\vec{u}$ прямые

▲ **Решение. Что происходит.** Вопрос: как найти H и V, если угол броска не дан ни в одном из бросков? Мячик в полёте — материальная точка (его размеры и сопротивление воздуха не учитываем, так сказано в условии), и на него действует одна сила — тяжести $m\vec{g}$. По второму закону Ньютона ускорение в любой точке траектории равно $\vec{g}$: постоянное по

модулю и направлению. Поэтому движение описывается двумя векторными уравнениями равноускоренного движения, и пока мы не проецируем их на оси, угол в них вообще не появляется. Условие «конечная скорость перпендикулярна начальной» превращает первое уравнение в прямоугольный треугольник с гипотенузой $g t$. Это класс задач «баллистика через треугольник скоростей». Второе соотношение даёт закон сохранения энергии: сила тяжести потенциальна, поэтому скорость в конце определяется только скоростью в начале и разностью высот, а не формой траектории.

Обозначения. $\vec{V}$ — начальная скорость (одинакова по модулю в обоих бросках), $\vec{u}_1$ и $\vec{u}_2$ — скорости мячика в момент, когда его поймали, в первом (Петя → Вася) и во втором (Вася → Петя) бросках, H — высота кисти Пети над кистью Васи.

1. Векторные уравнения движения. Для каждого броска запишем, как скорость и перемещение зависят от времени полёта t при постоянном ускорении $\vec{g}$:

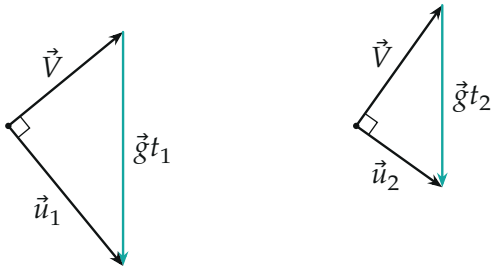
$$\vec{u} = \vec{V} + \vec{g}\, t, \qquad \vec{s} = \vec{V}\, t + \frac{\vec{g}\, t^2}{2},$$

где $\vec{s}$ — перемещение от руки бросившего до руки поймавшего. Зачем векторная форма: в ней не нужны ни углы, ни оси, а неизвестный угол броска входит только в направление $\vec{V}$. Вертикальная составляющая перемещения первого броска — это как раз $-H$ (рука Васи ниже на H), второго — $+H$; горизонтальные перемещения неизвестны (Вася сделал несколько шагов), поэтому уравнения для x дали бы только новые неизвестные и мы их не пишем.

2. Треугольник скоростей. Из первого уравнения приращение скорости за время полёта t_1 равно $\vec{u}_1 - \vec{V} = \vec{g}\, t_1$. Векторы $\vec{V}$ и $\vec{u}_1$ перпендикулярны, значит, они — катеты, а $\vec{g}\, t_1$ — гипотенуза (рис. 2). По теореме Пифагора

$$V^2 + u_1^2 = g^2 t_1^2.$$

Для второго броска так же: $V^2 + u_2^2 = g^2 t_2^2$.



а б

Рис. 2. Треугольники скоростей: $\vec{u} = \vec{V} + \vec{g}\,t$, гипотенуза — вертикальный вектор $\vec{g}\,t$. а) первый бросок, б) второй

3. Закон сохранения энергии. Из треугольника мы получили два уравнения, а неизвестных четыре (V, u_1, u_2, H): H в них пока не входит. Свяжем скорости с высотой. Сопротивления воздуха нет, работу совершает только сила тяжести, она потенциальна, поэтому кинетическая плюс потенциальная энергия мячика в полёте постоянна. Нулевой уровень потенциальной энергии выберем на руке Васи. В первом броске мячик опускается на H (балкон выше), и изменение кинетической энергии равно работе силы тяжести:

$$\frac{mu_1^2}{2} - \frac{mV^2}{2} = mgH \quad \Rightarrow \quad u_1^2 = V^2 + 2gH.$$

Во втором броске мячик поднимается на ту же высоту H, работа силы тяжести отрицательна:

$$u_2^2 = V^2 - 2gH.$$

Зачем энергия: она не требует знать ни угол, ни траекторию — только начальную и конечную высоту.

4. Исключаем u_1 и u_2. Подставим из пункта 2 в теоремы Пифагора из пункта 1:

$$g^2t_1^2 = 2V^2 + 2gH, \qquad g^2t_2^2 = 2V^2 - 2gH.$$

Неизвестных осталось два (V и H), уравнений два. Сложим уравнения:

слагаемое с H уходит,

$$g^2\left(t_1^2+t_2^2\right)=4V^2 \quad\Rightarrow\quad V=\frac{g}{2}\sqrt{t_1^2+t_2^2}.$$

Вычтем второе из первого: уходит V,

$$g^2\left(t_1^2-t_2^2\right)=4gH \quad\Rightarrow\quad H=\frac{g\left(t_1^2-t_2^2\right)}{4}.$$

5. Числа.

$$V=\frac{10}{2}\sqrt{2{,}21^2+1{,}72^2}\approx 5\cdot 2{,}80\approx 14\text{ м/с},$$

$$H=\frac{10\left(2{,}21^2-1{,}72^2\right)}{4}=\frac{10\cdot 1{,}93}{4}\approx 4{,}8\text{ м}.$$

Знак H положительный: $t_1>t_2$, значит, дольше летел мячик, брошенный вниз, и балкон действительно выше. Обратите внимание: $gt_1\approx 22$ м/с больше $V\approx 14$ м/с — гипотенуза длиннее катета, треугольник существует; будь $gt<V$, такой бросок был бы невозможен.

Обратите внимание: сумма уравнений даёт V потому, что в обоих бросках модуль начальной скорости одинаков (V), а разность высот входит в них с противоположными знаками (вниз и вверх).

Проверка. Размерность: gt — м/с, gt^2 — м, обе формулы верны.

Предельный случай: $t_1=t_2$ даёт $H=0$ — мячик летает между кистями на одном уровне; тогда $V=gt/\sqrt{2}$, то есть $t=\sqrt{2}\,V/g=2V\sin 45^\circ/g$ — известное время полёта при угле 45°, при котором начальная и конечная скорости как раз перпендикулярны (рис. 3).

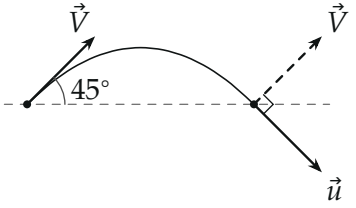


Рис. 3. Предельный случай $H=0$: бросок под 45° на ту же высоту, конечная

скорость перпендикулярна начальной

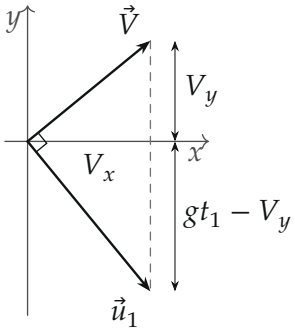


Рис. 4. Второй способ: проекции $\vec{V}$ и $\vec{u}_1$ (первый бросок, ось y вверх). Горизонтальные проекции равны, вертикальная уменьшилась на gt_1

Второй способ — аналитический, через проекции (рис. 4). Оси: y вертикально вверх, x горизонтально. Вектор $\vec{g}\,t$ вертикален, поэтому горизонтальные проекции $\vec{V}$ и $\vec{u}$ равны, $u_x = V_x$, а вертикальные отличаются на gt: $u_y = V_y - gt$. Перпендикулярность означает нулевое скалярное произведение, которое в проекциях равно $V_x u_x + V_y u_y = 0$. Подставим: $V_x^2 + V_y\,(V_y - gt) = 0$. Первые два слагаемых в сумме $V_x^2 + V_y^2 = V^2$, откуда $V_y = V^2/(gt)$. Теперь вертикальное перемещение: за t_1 первый бросок даёт $V_y t_1 - gt_1^2/2$, и оно равно $-H$; второй даёт $+H$. Складывая и вычитая два уравнения, приходим к тем же формулам. Проверим числами. Для первого броска $V_y \approx 8{,}9$ м/с, и вертикальное смещение

$$V_y t_1 - \frac{g t_1^2}{2} \approx 19{,}6 - 24{,}4 \approx -4{,}8 \text{ м}$$

— вниз на 4,8 м. Для второго $V_y \approx 11{,}4$ м/с, смещение $11{,}4 \cdot 1{,}72 - 5 \cdot 1{,}72^2 \approx +4{,}8$ м — вверх на те же 4,8 м. Оба броска согласованы с одним значением H.

Смысл: перпендикулярность скоростей в двух бросках с одинаковой скоростью вылета хватает, чтобы по двум временам полёта найти и скорость, и высоту — ни одного угла вычислять не пришлось.

Ответ. $H = \dfrac{g\,(t_1^2 - t_2^2)}{4} \approx 4{,}8$ м; $\quad V = \dfrac{g}{2}\sqrt{t_1^2 + t_2^2} \approx 14$ м/с.