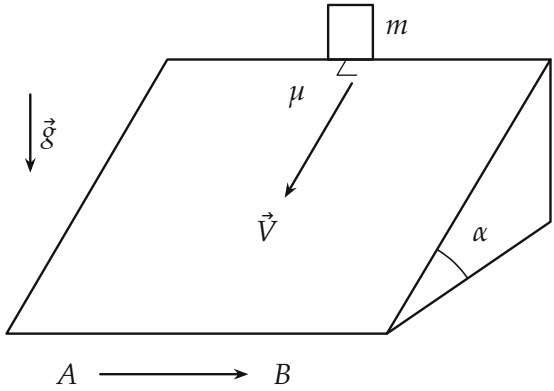
Груз на движущемся клине с трением

Задача 2. [МОШ 2016/17, 11 класс, задача 2] С наклонной поверхности клина с углом α при основании, движущегося по горизонтальному столу с постоянной скоростью вдоль направления AB, сталкивают небольшой груз массой m так, что в начальный момент его скорость V относительно клина направлена перпендикулярно AB вдоль наклонной поверхности (см. рисунок). Коэффициент трения между поверхностью клина и грузом равен μ ($\mu > \operatorname{tg}\alpha$). Чему будет равна работа силы трения, с которой клин действует на груз, к моменту, когда проскальзывание груза по поверхности клина прекратится? По какой траектории движется груз, пока проскальзывание еще не прекратилось? Ответ на оба вопроса нужно дать относительно системы отсчета, связанной со столом. Влиянием воздуха можно пренебречь.



▲ **Решение. Что происходит.** Вся задача держится на одном факте: сила трения скольжения направлена против *относительной* скорости груза — скорости относительно той поверхности, по которой он скользит, а не относительно стола. Поэтому первый вопрос такой: как груз движется относительно клина? Клин едет равномерно, значит, система отсчёта клина инерциальна, и в ней законы Ньютона те же, а сила тяжести, нормальная реакция и трение — те же по величине и направлению (силы от системы отсчёта не зависят, ускорение — тоже, если системы движутся

друг относительно друга без ускорения). В этой системе клин покоится, груз получил скорость вдоль склона и скользит по линии падения воды вниз, трение его тормозит; так как $\mu > \operatorname{tg}\alpha$, он остановится и дальше будет покоиться на клине. Затем возвращаемся в систему стола, где от нас и требуют ответа: ускорение и сила трения (она всё время лежит вдоль линии падения воды) остаются прежними, а начальная скорость уже другая. Это и даёт параболу, а работу трения — через определение работы.

Обозначения. u — скорость клина (в условии не задана; ответ от неё не зависит). Ось ξ — вдоль линии падения воды вниз по склону, ось n — по нормали к склону от клина, ось x — вдоль AB (рис. 2). s — путь груза по склону до остановки, a — модуль его замедления.

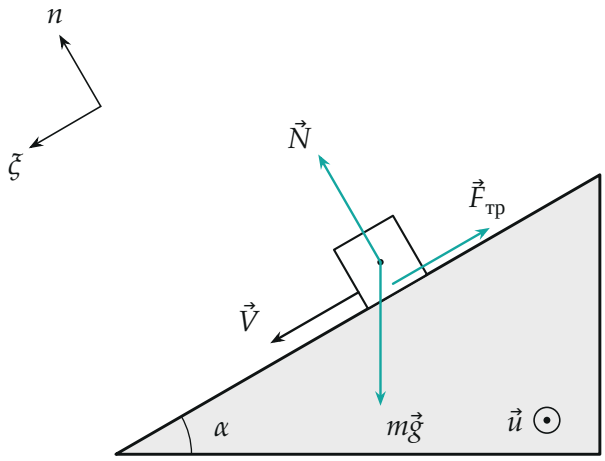


Рис. 2. Вид вдоль AB: клин движется на нас со скоростью $\vec{u}$; все силы лежат в плоскости рисунка. Груз скользит вниз по склону, трение направлено вверх по склону

1. Силы в системе клина. Сначала фиксируем закон трения скольжения в векторном виде:

$$\vec{F}_{тр} = -\mu N \frac{\vec{v}_{отн}}{|\vec{v}_{отн}|}.$$

Знак «минус» и есть «против относительной скорости»; по модулю

$F_{тр} = \mu N$, пока груз скользит. Груз не отрывается от склона и не проваливается, поэтому его ускорение вдоль нормали равно нулю. Второй закон Ньютона для груза в проекции на ось n:

$$N - mg\cos\alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad N = mg\cos\alpha.$$

Груз скользит, поэтому сила трения скольжения $F_{тр} = \mu N = \mu mg\cos\alpha$ и направлена против относительной скорости, то есть вверх по склону.

2. Замедление. Второй закон Ньютона для груза в проекции на ось ξ (вниз по склону):

$$ma_\xi = mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha = -mg\,(\mu\cos\alpha - \sin\alpha).$$

Так как $\mu > \operatorname{tg}\alpha$, то $\mu\cos\alpha > \sin\alpha$, ускорение направлено вверх по склону против скорости: груз тормозится с постоянным по модулю замедлением $a = g\,(\mu\cos\alpha - \sin\alpha)$. Заодно видно, что движение относительно клина — по прямой: начальная скорость лежит на линии падения воды, и все силы (тяжесть, реакция, трение) лежат в плоскости, перпендикулярной AB и содержащей эту линию, так что поперёк линии ничто груз не сдвигает. Направление трения при этом *не меняется*: оно всегда вдоль склона вверх.

3. Путь до остановки. Скорость вдоль склона падает от V до нуля с постоянным замедлением: $V^2 = 2as$, откуда

$$s = \frac{V^2}{2g\,(\mu\cos\alpha - \sin\alpha)}.$$

Когда груз остановился, он больше не скользит. Скатываться вниз он не начнёт: сила $mg\sin\alpha$ вдоль склона меньше максимально возможной силы трения покоя $\mu mg\cos\alpha$ — это и есть условие $\mu > \operatorname{tg}\alpha$.

4. Работа силы трения в системе стола. Работу определяем по определению: на малом перемещении $\mathrm{d}\vec{r}$ она равна $\mathrm{d}A = \vec{F}_{тр}\cdot\mathrm{d}\vec{r}$, а полная — сумма таких слагаемых по всей траектории. В системе стола траектория — парабола, угол между $\mathrm{d}\vec{r}$ и силой всё время меняется. Но сила имеет постоянное направление (вдоль склона вверх) и постоянную величину

μN, поэтому в каждом слагаемом важна только составляющая перемещения вдоль склона: $\mathrm{d}A = -\mu N\,\mathrm{d}\xi$ (знак «минус» — сила направлена против оси ξ). Составляющие вдоль AB скалярное произведение с силой не меняют, так как $\vec{F}_{\text{тр}} \perp AB$. Сумма $\mathrm{d}\xi$ — полное смещение груза вдоль склона, а оно равно пути s относительно клина: клин смещает всё вдоль AB, но вдоль склона ничего не добавляет. Значит,

$$A_{\text{тр}} = -F_{\text{тр}}\,s = -\mu mg\cos\alpha\cdot\frac{V^2}{2g\,(\mu\cos\alpha-\sin\alpha)} = -\frac{\mu mV^2}{2\,(\mu-\operatorname{tg}\alpha)},$$

здесь числитель и знаменатель делились на $\cos\alpha$. Работа отрицательна: сила трения тормозит груз.

Обратите внимание: в разных системах отсчёта работа одной и той же силы вообще говоря разная, ведь перемещение разное. Здесь она оказалась такой же, как в системе клина, потому что $\vec{F}_{\text{тр}} \perp \vec{u}$; будь скорость клина направлена иначе (например, вдоль склона), результат был бы другим.

5. Траектория в системе стола. Рассуждение качественное. Ускорение груза от системы отсчёта не зависит (системы движутся друг относительно друга без ускорения), поэтому в системе стола оно то же самое: постоянное по величине и направлению, вдоль склона вверх. Начальная скорость в системе стола $\vec{u}+\vec{V}$ направлена под углом к этому ускорению, не вдоль него. Движение с постоянным ускорением и начальной скоростью, не параллельной ускорению, — всегда парабола (как у брошенного под углом к горизонту камня: там ускорение $\vec{g}$, ось параболы параллельна $\vec{g}$); если бы скорость была параллельна ускорению, получили бы прямую. Здесь ось параболы параллельна склону. Проверим это уравнениями: скорость груза в системе стола — сумма скорости клина и скорости относительно клина: $\vec{v} = \vec{u} + \vec{v}_{\text{отн}}$, причём $\vec{u} \perp \vec{v}_{\text{отн}}$. По оси x (вдоль AB) груз движется равномерно: $x = ut$, на него по этой оси ничего не действует. Вдоль склона движение равнозамедленное: $\xi = Vt - at^2/2$. Исключим время ($t = x/u$):

$$\xi = \frac{V}{u}\,x - \frac{a}{2u^2}\,x^2.$$

Это уравнение параболы: груз движется по параболе, лежащей в плоскости наклонной поверхности клина (эта плоскость содержит направление AB, поэтому, сдвигаясь вдоль AB, она остаётся на месте). Если клин стоит ($u = 0$), парабола вырождается в отрезок прямой по линии падения воды.

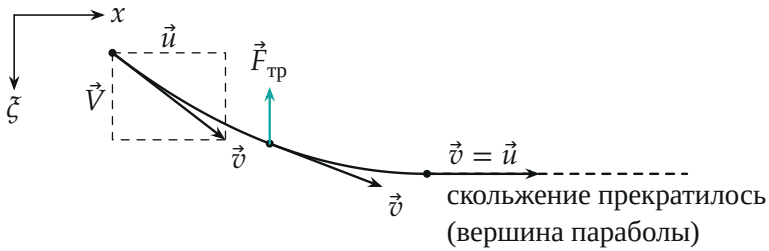


Рис. 3. Траектория груза в системе стола в плоскости склона (оси — слева сверху). Векторы $\vec{v} = \vec{u} + \vec{v}_{отн}$ в моменты $t = 0, V/2a, V/a$ и сила трения (вверх по склону) в момент $t = V/2a$ — её направление всё время то же; построено для $u = 1{,}3V$, масштаб по осям одинаковый

Парабола обрывается в вершине: в момент $t_0 = V/a$ производная $d\xi/dx = 0$ — составляющая скорости вдоль склона обратилась в ноль, $\vec{v} = \vec{u}$. Дальше груз покоится на клине и едет вместе с ним по прямой параллельно AB, касательной к параболе в вершине (штриховая линия на рис. 3).

Проверка. Размерность: $\mu m V^2$ — джоуль, формула сходится. В ответе организаторов множитель m пропущен — опечатка: μV^2 имеет размерность м^2/с^2, а не джоуль. Знак: $A_{тр} < 0$, груз теряет энергию. Предел $\alpha \to 0$ (горизонтальная плита): $A_{тр} \to -\frac{1}{2} m V^2$ — вся кинетическая энергия относительного движения уходит в тепло, как и должно быть. Предел $\mu \to \operatorname{tg}\alpha$ сверху: $A_{тр} \to -\infty$ — путь по склону растёт неограниченно.

Второй способ, закон изменения кинетической энергии в системе стола. Начальная скорость груза $\vec{u} + \vec{V}$ ($\vec{u} \perp \vec{V}$), конечная $\vec{u}$:

$$\Delta K = \frac{mu^2}{2} - \frac{m\,(u^2 + V^2)}{2} = -\frac{mV^2}{2}.$$

Работа силы реакции N равна нулю: $\vec{N} \perp \vec{u}$ и $\vec{N} \perp \vec{s}$, значит, перпендикулярна и перемещению в системе стола. Работа силы тяжести $mg\,s\sin\alpha$. Отсюда

$$A_{\text{тр}} = -\frac{mV^2}{2} - mg\,s\sin\alpha = -\frac{mV^2}{2}\left(1 + \frac{\sin\alpha}{\mu\cos\alpha - \sin\alpha}\right) = \\ = -\frac{\mu m V^2}{2\,(\mu - \operatorname{tg}\alpha)},$$

тот же результат.

Смысл: клин, едущий вдоль AB, не влияет на работу трения и лишь «растягивает» прямолинейное скольжение вдоль склона в параболу.

Ответ. $A_{\text{тр}} = -\dfrac{\mu m V^2}{2\,(\mu - \operatorname{tg}\alpha)}$; относительно стола груз движется по параболе (в плоскости наклонной поверхности) до остановки относительно клина.