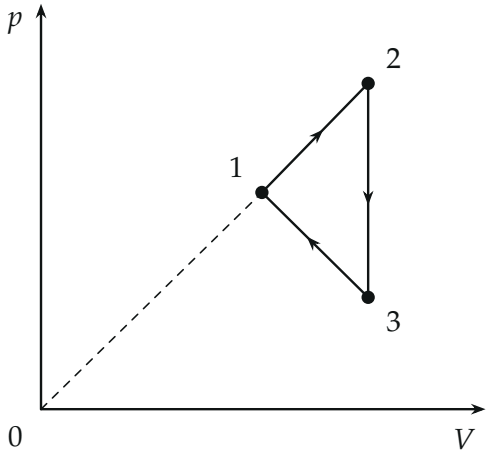
Цикл газа и его КПД

Задача 3. [МОШ 2016/17, 11 класс, задача 3] С одним молем идеального одноатомного газа происходит циклический процесс 1–2–3–1, график которого приведен на pV-диаграмме. Температуры газа в состояниях 1, 2 и 3 равны $T_1 = 4T_0$, $T_2 = 9T_0$ и $T_3 = 3T_0$ соответственно.

1) Чему равна работа, совершаемая газом за один цикл?
2) Определите КПД этого процесса.



▲ **Решение. Что происходит.** Газ идеальный одноатомный, один моль: $pV = RT$ и внутренняя энергия $U = \frac{3}{2}RT$. В цикле два участка 1–2 и 3–1 лежат на прямых, а 2–3 — вертикальная прямая, изохора. Чтобы не нагромождать рисунок, давления и объёмы всех состояний выразим через p_1 и V_1 — одной пары хватит, потому что известны температуры и вид участков. Работа за цикл — площадь треугольника. КПД — это работа, делённая на теплоту, которую газ *получил*, и главная ловушка в том, что на наклонной прямой, которая не проходит через начало координат, газ в одной части получает теплоту, а в другой отдаёт: знак теплоты меняется. Нужно найти точку смены знака и складывать только положительные порции. Отсюда и план: каждый участок режем на очень малые куски и для каждого смотрим знак $dQ = dU + dA$, где

dU определяет температура (на какую изотерму переходит газ), а dA — изменение объёма (расширение или сжатие).

Обозначения. Давление и объём в состоянии 1 — p_1, V_1; тогда $p_1V_1 = RT_1 = 4RT_0$. Все остальные состояния выразим через них.

Пункт 1. 1. Состояния 2 и 3. Участок 1–2 лежит на прямой через начало координат, то есть $p \propto V$, поэтому $T \propto pV \propto V^2$ и

$$\frac{V_2}{V_1} = \sqrt{\frac{T_2}{T_1}} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}, \qquad p_2 = \frac{3}{2}p_1.$$

Участок 2–3 — изохора: $V_3 = V_2 = \frac{3}{2}V_1$, давление пропорционально температуре, $p_3 = p_2\dfrac{T_3}{T_2} = \dfrac{p_2}{3} = \dfrac{1}{2}p_1$. Проверка по температуре: $p_3V_3 = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}p_1V_1 = \frac{3}{4}\cdot 4RT_0 = 3RT_0$, верно.

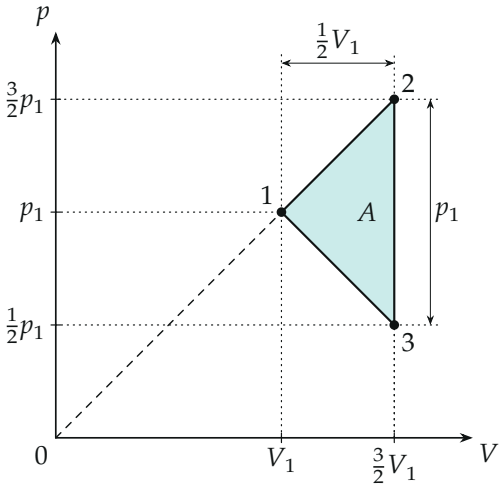


Рис. 2. Состояния в единицах p_1, V_1; закрашено — работа за цикл

2. Работа за цикл. Работа газа при расширении равна площади под графиком, а за цикл — площади, ограниченной контуром (рис. 2). Контур обходится по часовой стрелке (верх идёт вправо, низ — влево), поэтому работа газа положительна. У треугольника основание — отрезок

2–3 длиной $p_2 - p_3 = p_1$, высота — $V_2 - V_1 = \frac{1}{2}V_1$:

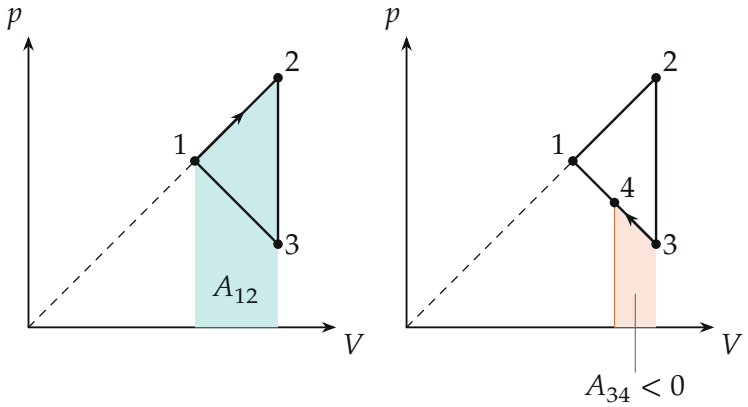
$$A = \frac{1}{2}p_1 \cdot \frac{V_1}{2} = \frac{p_1 V_1}{4} = RT_0.$$

Пункт 2. 3. Теплота на участках 1–2 и 2–3. Знак теплоты на каждом из этих участков не меняется, и вот почему. На 1–2 объём растёт, так что $dA > 0$ в каждом малом куске; температура на этом участке растёт ($4T_0 \to 9T_0$, это видно и по изотермам: газ уходит на всё более далёкие от начала координат изотермы), поэтому $dU > 0$. Оба слагаемых положительны, значит, $dQ > 0$ всюду и газ на всём участке получает теплоту. На изохоре 2–3 работы нет вообще, температура падает ($9T_0 \to 3T_0$), $dU < 0$, а значит $dQ < 0$ всюду: газ отдаёт. Первое начало термодинамики для участка: $Q = \Delta U + A_{\text{газа}}$, где $\Delta U = \frac{3}{2}R\,\Delta T$. На участке 1–2 газ нагревается и расширяется, работа — площадь трапеции под отрезком 1–2 (рис. 3, а):

$$\Delta U_{12} = \frac{3}{2}R\,(9-4)T_0 = \frac{15}{2}RT_0,$$

$$A_{12} = \frac{p_1 + p_2}{2}\,(V_2 - V_1) = \frac{5}{8}p_1 V_1 = \frac{5}{2}RT_0,$$

$$Q_{12} = \frac{15}{2}RT_0 + \frac{5}{2}RT_0 = 10\,RT_0 > 0.$$



а б

Рис. 3. Работа газа на участке — площадь под ним: а) на 1–2 объём растёт, $A_{12} > 0$; б) на 3–4 объём уменьшается, $A_{34} < 0$

На изохоре 2–3 работы нет, газ остывает: $Q_{23} = \frac{3}{2}R\,(3-9)T_0 = -9\,RT_0 < 0$ — газ отдаёт теплоту.

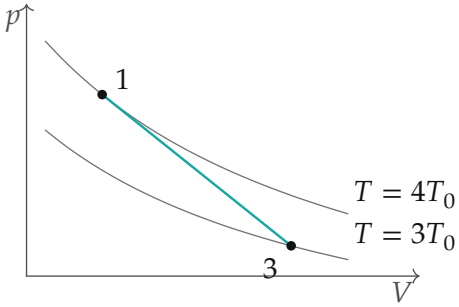


Рис. 4. Участок 3–1 и две изотермы: от 3 к 1 газ переходит на всё более горячие изотермы и касается изотермы $4T_0$ в самой точке 1. Показан фрагмент диаграммы: оси начинаются не с нуля

4. Участок 3–1: где меняется знак теплоты. Здесь нельзя угадать знак: на участке 3–1 объём уменьшается, работа газа отрицательна ($dA < 0$), а температура растёт ($3T_0 \to 4T_0$): на рис. 4 при движении от 3 к 1 газ переходит на всё более горячие изотермы, так что $dU > 0$ (максимум температуры на этой прямой — в самой точке 1, где она касается изотермы: $pV \propto 2x - x^2$, $x = V/V_1$, наибольшее при $x = 1$; касания внутри отрезка нет, и знак dQ меняет не температура, а соперничество dU и dA). Два слагаемых $dQ = dU + dA$ разного знака, какое больше — зависит от места на прямой. Поэтому участок режем на малые куски. Уравнение прямой 3–1 проходит через точки $(V_1;\, p_1)$ и $(\frac{3}{2}V_1;\, \frac{1}{2}p_1)$: $p = p_1\left(2 - \dfrac{V}{V_1}\right)$. Рассмотрим малый шаг dV (в нём $d(pV) = p\,dV + V\,dp$, произведение двух малых $dp\,dV$ отбрасываем — оно много меньше обоих слагаемых):

$$dQ = dU + p\,dV = \frac{3}{2}\,d(pV) + p\,dV, \qquad pV = p_1 V\left(2 - \frac{V}{V_1}\right),$$

$$dQ = p_1\left(5 - 4\,\frac{V}{V_1}\right)dV.$$

Газ идёт по участку от 3 к 1, объём уменьшается, $dV < 0$. Поэтому $dQ > 0$ при $5 - 4V/V_1 < 0$, то есть при $V > \frac{5}{4}V_1$: газ получает теплоту. При $V < \frac{5}{4}V_1$ знак обратный, газ отдаёт. Значит, точка смены знака — состояние 4:

$$V_4 = \frac{5}{4}\,V_1, \qquad p_4 = \frac{3}{4}\,p_1, \qquad T_4 = \frac{p_4V_4}{R} = \frac{15}{16}\cdot 4T_0 = \frac{15}{4}\,T_0.$$

В состоянии 4 прямая 3–1 касается адиабаты (рис. 5): по адиабате $dQ = 0$.

5. Теплота на участках 3–4 и 4–1. Работа на 3–4 отрицательна: газ сжимается (рис. 3, б).

$$\Delta U_{34} = \frac{3}{2}R\left(\frac{15}{4} - 3\right)T_0 = \frac{9}{8}RT_0,$$

$$A_{34} = \frac{p_3 + p_4}{2}\,(V_4 - V_3) = \frac{5}{4}\cdot\frac{p_1}{2}\cdot\left(-\frac{V_1}{4}\right) = -\frac{5}{32}\,p_1V_1 = -\frac{5}{8}RT_0,$$

$$Q_{34} = \frac{9}{8}RT_0 - \frac{5}{8}RT_0 = \frac{1}{2}\,RT_0 > 0.$$

На всём участке 3–1 теплота

$$Q_{31} = \frac{3}{2}R\,(4-3)T_0 - \frac{3}{8}\,p_1V_1 = \frac{3}{2}RT_0 - \frac{3}{2}RT_0 = 0,$$

поэтому на 4–1 газ отдаёт $Q_{41} = -\frac{1}{2}RT_0$.

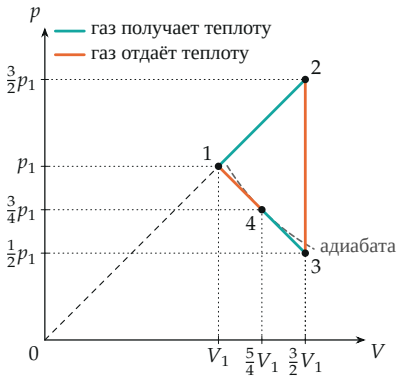


Рис. 5. Где газ получает теплоту (бирюзовая линия) и где отдаёт (оранжевая). В состоянии 4 прямая 3–1 касается адиабаты

6. КПД. Газ получает теплоту только на участках 1–2 и 3–4:

$$Q_+ = Q_{12} + Q_{34} = 10\,RT_0 + \frac{1}{2}\,RT_0 = \frac{21}{2}\,RT_0,$$

$$\eta = \frac{A}{Q_+} = \frac{RT_0}{\frac{21}{2}RT_0} = \frac{2}{21} \approx 0{,}095 = 9{,}5\,\%.$$

Обратите внимание: за теплоту, полученную газом, принимаем только положительные порции. Если взять $Q_+ = Q_{12}$ и забыть про участок 3–4, получится 10 %; если считать $Q_{31} = 0$ на всём участке «ничего не получено», ошибка та же.

Проверка. Размерность: RT_0 — джоуль. Закон сохранения энергии: за цикл $\Delta U = 0$, поэтому $A = \sum Q = 10 - 9 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 1$ (в единицах RT_0), как и найдено в пункте 2. Второй способ для точки 4: условие касания адиабаты. Наклон прямой 3–1 равен $dp/dV = -p_1/V_1$; наклон адиабаты $pV^{5/3} = \text{const}$ равен $-\frac{5}{3}\,p/V$. Приравняем: $p/V = \frac{3}{5}\,p_1/V_1$. Точка $(\frac{5}{4}V_1;\ \frac{3}{4}p_1)$ даёт ровно $\dfrac{3p_1/4}{5V_1/4} = \dfrac{3}{5}\dfrac{p_1}{V_1}$ — та же точка.

Смысл: в КПД идёт только действительно полученная теплота, а на прямой, не идущей из начала координат, газ часть пути отдаёт теплоту, хотя нагревается.

Ответ. 1) $A = RT_0$; 2) $\eta = \dfrac{2}{21} \approx 9{,}5\,\%$.