Заряженные кубы и потенциал

Задача 4. [МОШ 2016/17, 11 класс, задача 4] Два кубика с длинами рёбер $3a$ и a и общим центром делят пространство на три области. Область внутри маленького кубика равномерно заряжена по объёму электрическим зарядом с плотностью $-\rho_1$ ($\rho_1 > 0$), пространство между поверхностями маленького и большого кубиков равномерно заряжено с объёмной плотностью заряда $+\rho_2$ ($\rho_2 > 0$), вне большого кубика электрических зарядов нет. Найдите отношение объёмных плотностей заряда ρ_1/ρ_2, при котором потенциал в центре кубиков будет равен потенциалу бесконечно удаленной точки, то есть нулю.

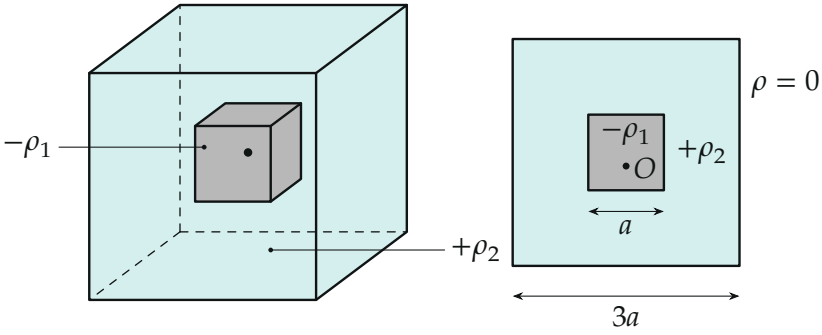


Рис. 1. Поясняющий рисунок: два вложенных куба с общим центром O (слева — общий вид, справа — сечение через центр)

▲ **Решение. Что происходит.** Объёмная плотность заряда — заряд единицы объёма: если в малом объёме ΔV заряд Δq, то $\rho = \Delta q/\Delta V$, а значит $\Delta q = \rho\,\Delta V$. Потенциал в точке — сумма вкладов всех зарядов, $\varphi = k\sum \Delta q/r = k\sum \rho\,\Delta V/r$ (суммируем по малым кубикам, на которые мысленно разбито тело), и в бесконечности он равен нулю. Точно вычислить такую сумму для куба в его центре тяжело, но она и не нужна: нужно найти *отношение* потенциалов, а отношение находится без счёта. Идей две. Первая — суперпозиция: потенциалы складываются, поэтому систему из условия можно собрать наложением нескольких однородно заряженных кубов с общим центром, и тогда искать надо потенциал только одного простого тела — куба. Вторая — подобие: как

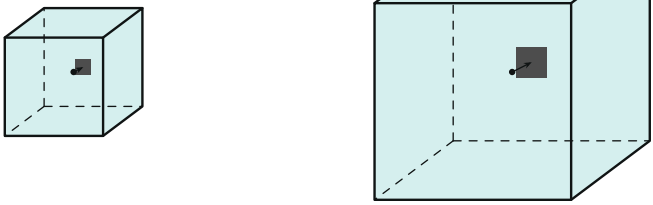
потенциал в центре однородно заряженного куба зависит от плотности и размера (тот же вывод даёт метод размерностей, он дан после пункта 3). Условие $\varphi(O) = 0$ превращается в уравнение на ρ_1/ρ_2.

Обозначения. $\varphi(\rho, \ell)$ — потенциал в центре куба с ребром ℓ, однородно заряженного по объёму с плотностью ρ (вне куба зарядов нет); $k = 1/(4\pi\varepsilon_0)$.

1. Как потенциал зависит от ρ и ℓ. Возьмём куб с ребром ℓ и ровно такой же куб, увеличенный в λ раз во всех направлениях, с той же плотностью ρ (рис. 2). Разобьём первый куб на очень много малых кубиков и так же разобьём второй — на столько же, в том же расположении: каждому малому кубику первого куба соответствует кубик второго, просто увеличенный в λ раз. Берём один такой кубик и сравним его вклад в потенциал в центре. Каждому малому элементу объёма dV первого куба соответствует элемент $\lambda^3 dV$ второго: его заряд в λ^3 раз больше, а расстояние до центра в λ раз больше. Вклад элемента в потенциал $d\varphi = k\,dq/r$ умножается на $\lambda^3/\lambda = \lambda^2$. Это верно для каждой пары кубиков, поэтому и вся сумма умножается на λ^2 — саму сумму считать не нужно: $\varphi(\rho, \lambda\ell) = \lambda^2\varphi(\rho, \ell)$. Теперь меняем только плотность: геометрия (расположение кубиков, расстояния, их объёмы) не меняется, заряд каждого кубика $\rho\,\Delta V$ умножается на то же число, что ρ, значит, и вся сумма — потенциал пропорционален ρ. Получаем

$$\varphi(\rho, \ell) = C\,\rho\,\ell^2,$$

где C — число, зависящее только от формы тела (у куба — свой, нам он не понадобится).

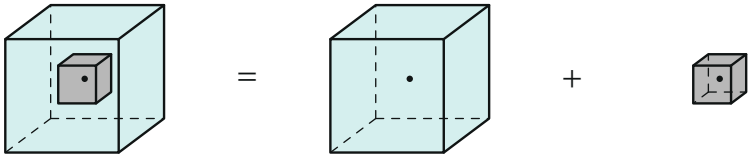


куб с ребром ℓ: элемент $dq = \rho\, dV$ на расстоянии r; $\varphi = \varphi_1$

куб с ребром 2ℓ: элемент $8\rho\, dV$ на расстоянии $2r$; $\varphi = 4\varphi_1$

Рис. 2. Подобие: увеличили куб вдвое, элемент заряда стал в 8 раз больше, расстояние — в 2 раза: вклад в потенциал вырос в 4 раза

2. Система как наложение двух кубов. Заряды складываются, потенциалы тоже (принцип суперпозиции). Соберём заданную систему из двух кубов с общим центром (рис. 3): большой куб с ребром $3a$ заряжен с плотностью $+\rho_2$ *везде внутри*, малый куб с ребром a добавляет плотность $-(\rho_1 + \rho_2)$. Проверим плотность в каждой области: в малом кубе $\rho_2 - (\rho_1 + \rho_2) = -\rho_1$, в слое между кубами $+\rho_2$, снаружи нуля — как в условии.



заданная система $-\rho_1$ внутри, $+\rho_2$ в слое

большой куб $+\rho_2$

малый куб $-(\rho_1 + \rho_2)$

Рис. 3. Суперпозиция: система — это большой куб с плотностью $+\rho_2$ плюс малый куб с плотностью $-(\rho_1 + \rho_2)$

3. Условие $\varphi(O) = 0$. Складываем потенциалы двух кубов в центре, используя формулу из пункта 1:

$$\varphi(O) = C\rho_2\,(3a)^2 - C\,(\rho_1 + \rho_2)\,a^2 = \\ = Ca^2\,(9\rho_2 - \rho_1 - \rho_2) = Ca^2\,(8\rho_2 - \rho_1).$$

Потенциал равен нулю при $\rho_1 = 8\rho_2$. Число C сократилось — именно поэтому его не нужно было знать.

Другой вывод зависимости — метод размерностей. Пусть кто-то один раз посчитал сумму $k\sum \rho\,\Delta V/r$ для куба с ребром a. Она зависит только от k, ρ и a (форма и расположение точки — одни и те же). Размерность потенциала — заряд, делённый на длину, умноженный на k; заряд ρa^3, поэтому потенциал обязан быть $k\rho a^3/a = k\rho a^2$ с точностью до безразмерного числа C, которое определяется только формой куба. Значит, $\varphi = C\,k\rho a^2$ — та же зависимость, что в пункте 1, и без разбиения на кубики. Для куба $3a$ получим $9Ck\rho a^2$, для малого — $Ck\rho a^2$, и C в уравнении снова сокращается. Тот же приём работает для любой фигуры одной формы: пластинки с поверхностной плотностью σ и характерным размером L даёт $\varphi = C\,k\sigma L$, и точное значение C не нужно, если сравнивать подобные тела.

Результат: $\rho_1/\rho_2 = 8$. Смысл по частям: слой даёт в центре положительный потенциал $8C\rho_2 a^2$ (куб $3a$ минус «вынутый» куб a той же плотности), малый куб — отрицательный $-C\rho_1 a^2$; нулю они равны при $\rho_1 = 8\rho_2$.

Обратите внимание: поле в центре равно нулю из симметрии при любых плотностях, поэтому условие нужно ставить именно на потенциал — он суммируется как число, без знака направления.

Проверка. Размерность:

$$k\rho\ell^2: \quad \frac{\text{Н}\cdot\text{м}^2}{\text{Кл}^2}\cdot\frac{\text{Кл}}{\text{м}^3}\cdot\text{м}^2 = \frac{\text{Н}\cdot\text{м}}{\text{Кл}} = \text{В}.$$

Знак и предел: при $\rho_1 = 0$ потенциал слоя положителен, при $\rho_1 \to \infty$ отрицателен, значит, где-то между есть нуль — и он при $\rho_1 = 8\rho_2$.

Второй способ — прямой счёт. Численное интегрирование $\int dV/r$ по кубу с ребром 1 и центром в начале даёт $\approx 2{,}38$, то есть $C \approx 2{,}38\,k$. Тогда $\varphi(O) \approx 2{,}38\,k\,a^2\,(8\rho_2 - \rho_1)$, и нуль при $\rho_1/\rho_2 = 8$ получается тем же. Ответ не зависит от формы тел: для двух концентрических шаров с радиусами в отношении $3:1$ потенциал в центре пропорционален ρR^2 и ответ был бы тем же — существенно только отношение размеров $3:1$.

Смысл: потенциал в центре растёт как $\rho\ell^2$, а не как заряд $\rho\ell^3$. Поэто-

му при той же плотности большой куб даёт в центре в 9 раз больший потенциал, чем малый, а не в 27, и для компенсации хватает отношения плотностей 8.

Ответ. $\rho_1/\rho_2 = 8$.