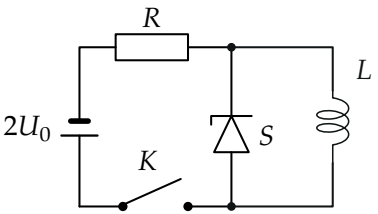
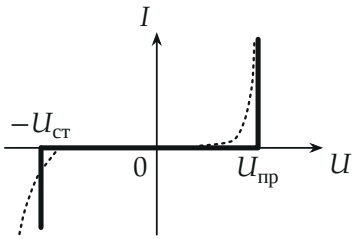
Стабилитрон и катушка

Задача 5. [МОШ 2016/17, 11 класс, задача 5] Из батарейки с ЭДС $2U_0$, резистора с сопротивлением R, которое намного больше внутреннего сопротивления батарейки, идеальной катушки индуктивностью L, стабилитрона S и ключа K собрали цепь, схема которой изображена на левом рисунке. Стабилитрон — это полупроводниковый элемент, подобный диоду, который при подключении в прямом направлении открывается (начинает проводить ток) при напряжении $U_{\text{пр}}$, а при подключении в обратном направлении — открывается при напряжении стабилизации $U_{\text{ст}}$. Идеализированная вольт-амперная характеристика (ВАХ) стабилитрона показана на рисунке справа сплошной жирной линией, а реальная ВАХ обозначена пунктирной линией. У используемого в данной цепи стабилитрона $U_{\text{пр}} = U_0$, а $U_{\text{ст}} = 10U_0$, его ВАХ можно считать идеализированной.





Ключ в цепи замыкают, ждут некоторое время и размыкают в тот момент, когда напряжение на резисторе составляет $3U_0/2$.

1) Найдите силу тока, текущего через резистор сразу после замыкания ключа.
2) Определите заряды, протекающие через стабилитрон при замкнутом и разомкнутом ключе.
3) Какое количество теплоты выделится в стабилитроне за всё время?

▲ **Решение. Что происходит.** Стабилитрон с идеальной ВАХ — элемент, у которого есть три состояния: закрыт (ток нулевой при $-U_{\text{ст}} < U < U_{\text{пр}}$), открыт вперёд (напряжение на нём ровно $U_{\text{пр}}$, ток любой положительный) и открыт назад (напряжение ровно $-U_{\text{ст}}$, ток любой отрицательный). Это задача про диод, поэтому действуем так: предполагаем

состояние, находим токи и напряжения, проверяем, что предположение не противоречит ВАХ, и меняем состояние, когда оно перестаёт выполняться. Катушка не даёт току измениться мгновенно: напряжение на ней $U_L = L\,dI/dt$, и если бы ток менялся скачком, напряжение было бы бесконечным; поэтому ток растёт или падает со скоростью $dI/dt = U_L/L$, где U_L — напряжение на ней.

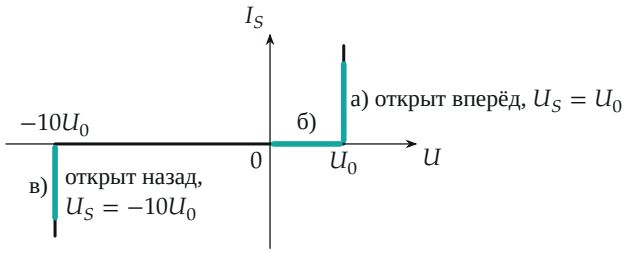


Рис. 2. Где на ВАХ стабилитрона работает цепь (бирюзой): а) ключ замкнут, $0 < t < L/R$; б) ключ замкнут, S закрыт, $0 < U_S < U_0$; в) ключ разомкнут

Обозначения. $\tau = L/R$. I_R, I_L, I_S — токи через резистор, катушку и стабилитрон; $I_S > 0$ — ток в прямом направлении (вверх на схеме, от плюса батарейки через S к узлу), $I_S < 0$ — в обратном. Напряжение на катушке равно напряжению на стабилитроне, потому что они включены параллельно.

Пункт 1. Ток через резистор сразу после замыкания.

1. Состояние стабилитрона (рис. 2, 3а). До замыкания ключа тока не было, и сразу после замыкания ток катушки по-прежнему нулевой (катушка не пропускает скачка тока): $I_L(0) = 0$. Для стабилитрона возможны два предположения: открыт вперёд ($I_S > 0$, $U_S = U_0$) или закрыт ($I_S = 0$). Допустим, что стабилитрон закрыт: тогда в этот момент ток нигде не течёт, на резисторе нет падения напряжения, и всё $2U_0$ батарейки приходится на параллельную пару катушка + стабилитрон, то есть на стабилитрон $2U_0 > U_{\text{пр}} = U_0$. Это противоречит ВАХ: больше U_0 напряжение на нём быть не может, он открыт вперёд, и $U_S = U_0$ (предположение «открыт» подтвердилось: ниже получим $I_S > 0$).

2. Ток. Закон Ома для резистора, у которого напряжение равно разности ЭДС и напряжения на параллельной паре $L \parallel S$ (внутреннее сопротивление батарейки мало по сравнению с R):

$$I_R = \frac{2U_0 - U_0}{R} = \frac{U_0}{R}.$$

Через катушку ток в этот момент нулевой, весь ток идёт через стабилитрон, и он положителен: $I_S = U_0/R > 0$ — как и предполагали.

Пункт 2. Заряды через стабилитрон.

3. Ключ замкнут, S открыт вперёд. Напряжение на катушке равно U_0 и не меняется, поэтому ток катушки растёт линейно, второй закон для катушки: $L\,dI_L/dt = U_0$ и

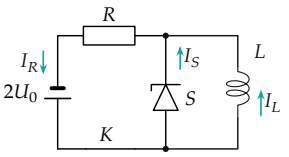
$$I_L = \frac{U_0}{L}\,t = \frac{U_0}{R} \cdot \frac{t}{\tau}.$$

Ток резистора остаётся равным U_0/R (напряжение на нём не меняется), а ток стабилитрона — остаток по закону сохранения заряда в узле:

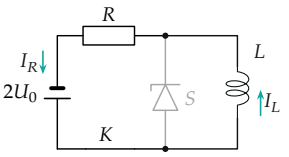
$$I_S = I_R - I_L = \frac{U_0}{R}\left(1 - \frac{t}{\tau}\right).$$

Он падает линейно и обращается в нуль в момент $t = \tau = L/R$. С этого момента стабилитрон закрывается: ток вперёд отрицательным быть не может.

Заметим, что к моменту размыкания стабилитрон уже закрыт, и это видно из условия, не считая времени. В момент размыкания напряжение на резисторе $\frac{3}{2}U_0$, поэтому на параллельной паре $L \parallel S$ остаётся $2U_0 - \frac{3}{2}U_0 = \frac{1}{2}U_0 < U_0$. Открытым вперёд стабилитрон был бы только при $U_S = U_0$, значит, к этому моменту ток через него давно ноль.



а) $0 < t < L/R$



б) $L/R < t < t_р$

Рис. 3. Ключ замкнут, стрелки — токи. а) S открыт вперёд, на нём и на катушке U_0; б) S закрыт (серым), цепь — последовательно батарейка, R, L

4. Заряд через S за это время. Ток — заряд, протекающий в единицу времени, поэтому за малое время dt протекает $dq = I_S\,dt$, а полный заряд — интеграл тока по времени, то есть площадь под графиком $I_S(t)$: треугольник с основанием τ и высотой U_0/R (рис. 5). Интегралом:

$$q_1 = \int_0^\tau \frac{U_0}{R}\left(1 - \frac{t}{\tau}\right)dt = \frac{U_0}{R}\left(\tau - \frac{\tau}{2}\right),$$

то есть

$$q_1 = \frac{1}{2}\cdot\frac{U_0}{R}\cdot\frac{L}{R} = \frac{LU_0}{2R^2}.$$

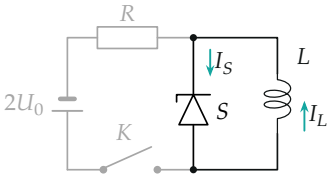
Заряд считаем только пока ток есть: после $t = \tau$ стабилитрон закрыт.

5. Стабилитрон закрыт, ключ ещё замкнут. Через S тока нет, цепь — последовательно батарейка, резистор и катушка. Для тока I (один и тот же в R и L): $L\,dI/dt = 2U_0 - IR$. При $t = \tau$ ток равен U_0/R, поэтому

$$I(t) = \frac{2U_0}{R} - \frac{U_0}{R}\,e^{-(t-\tau)/\tau}.$$

Он растёт от U_0/R к $2U_0/R$. Напряжение на катушке и на S равно $2U_0 - IR = U_0 e^{-(t-\tau)/\tau}$, то есть меньше U_0 и положительно: стабилитрон действительно остаётся закрытым. Ключ размыкают, когда напряжение на резисторе $IR = \frac{3}{2}U_0$, то есть при токе

$$I_* = \frac{3U_0}{2R}, \qquad t_\text{р} = \tau\,(1 + \ln 2)$$



в) ключ разомкнут

Рис. 4. Ключ разомкнут: цепь с батареей разорвана (серым), ток катушки замыкается через S, открытый назад, напряжение на нём $10U_0$

6. Ключ разомкнут. Ветвь с батарейкой отрезана, цепь — замкнутый контур из катушки и стабилитрона. Ток катушки не меняется скачком и продолжает течь в том же направлении, а это обратное направление для S (рис. 4). Он обязан течь, поэтому стабилитрон открывается назад — по ВАХ это возможно только при напряжении $U_{ст} = 10U_0$ (пока $|U| < 10U_0$, назад он тока не пропускает). Куда этот ток может деться, если не через S? Больше некуда: ветвь с батарейкой разорвана ключом. Катушка получает это напряжение, и ток падает линейно: $L\,dI_L/dt = -10U_0$,

$$I_L = I_* - \frac{10U_0}{L}\,t', \qquad t' = t - t_р.$$

После обращения тока в нуль всё прекращается: стабилитрон закрывается, а у катушки нет источника, который мог бы вновь создать в ней ток. Колебаний нет: в контуре нет конденсатора, который гнал бы ток обратно. Ток обращается в нуль за время

$$t_2 = \frac{I_* L}{10U_0} = \frac{3U_0}{2R} \cdot \frac{L}{10U_0} = \frac{3L}{20R} = 0{,}15\,\tau.$$

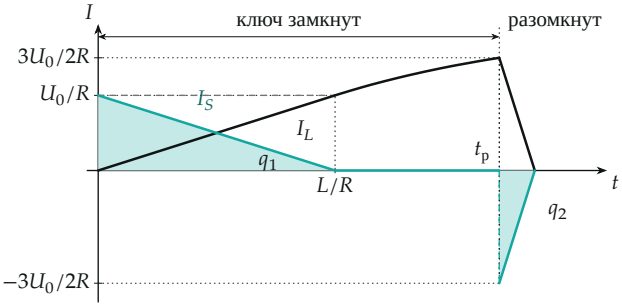


Рис. 5. Токи катушки и стабилитрона. Ток $I_S > 0$ — вперёд, $I_S < 0$ — назад; закрашенные площади — заряды q_1 и q_2

7. Заряд через S при разомкнутом ключе. Ток стабилитрона в обрат-

ном направлении равен току катушки и падает от I_* до нуля линейно:

$$q_2 = \frac{1}{2} I_* t_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{3U_0}{2R} \cdot \frac{3L}{20R} = \frac{9LU_0}{80R^2}.$$

Пункт 3. Теплота в стабилитроне. Мощность тепловых потерь на любом элементе — напряжение на нём, умноженное на ток, $P = U_S I_S$; за малое время выделяется $dQ = U_S I_S\, dt = U_S\, dq$. Напряжение на открытом стабилитроне постоянно, поэтому на каждом этапе теплота — напряжение, умноженное на заряд. При размыкании ток течёт назад, и произведение $U_S I_S$ положительно: $(-10U_0)(-I_S) > 0$ — теплота всё равно выделяется, а не поглощается.

8. Теплота. Пока стабилитрон открыт вперёд, напряжение U_0, заряд q_1; пока открыт назад — напряжение $10U_0$, заряд q_2. В промежутке, когда он закрыт, теплоты нет:

$$Q = U_0 q_1 + 10U_0\, q_2 = \frac{LU_0^2}{2R^2} + \frac{9LU_0^2}{8R^2} = \frac{13LU_0^2}{8R^2}.$$

Обратите внимание: напряжение на S в двух промежутках разное — U_0 при замкнутом ключе (прямое включение) и $10U_0$ при разомкнутом (пробой), поэтому теплоту считаем по частям.

Обратите внимание: при размыкании ключа ток катушки не меняется скачком, а ток через стабилитрон меняется: был нулём, а стал $-I_*$ (рис. 5). Поэтому заряд q_2 — площадь под падающим током катушки, а не продолжение q_1.

Проверка. Размерность: $\text{Гн} \cdot \text{В}/\text{Ом}^2 = \text{Кл}$, $\text{Гн} \cdot \text{В}^2/\text{Ом}^2 = \text{Дж}$.

Второй способ для теплоты при разомкнутом ключе — энергия: вся она уходит в тепло в S: $Q_2 = LI_*^2/2 = 9LU_0^2/(8R^2)$, что совпадает с $10U_0\, q_2$.

Смысл: стабилитрон — ограничитель напряжения; на единицу прошедшего заряда в обратном направлении выделяется в $U_{\text{ст}}/U_{\text{пр}} = 10$ раз больше теплоты, чем в прямом.

Ответ. 1) $I_0 = \dfrac{U_0}{R}$; 2) $q_S^{(1)} = \dfrac{LU_0}{2R^2}$, $q_S^{(2)} = \dfrac{9LU_0}{80R^2}$; 3) $Q = \dfrac{13LU_0^2}{8R^2}$.