Катящийся конус и фотоаппарат

Задача 6. [МОШ 2016/17, 11 класс, задача 6] Прямой круговой конус с образующей длиной $L = 13$ см и диаметром основания $D = 10$ см катится по горизонтальной поверхности, не проскальзывая (см. рис.). Центр основания конуса движется с постоянной по модулю скоростью, а максимально возможная скорость точки, лежащей на поверхности этого конуса, может быть равна $V = 1$ м/с. На одну из точек, расположенных на границе основания и боковой поверхности конуса, нанесена очень маленькая метка M. Над конусом неподвижно закреплен фотоаппарат Ф, объектив которого расположен горизонтально. В момент, когда метка находилась в своем наивысшем положении и строго под объективом фотоаппарата, был сделан фотоснимок. Через какое минимальное время после этого можно при помощи того же неподвижного фотоаппарата сделать точно такую же фотографию?

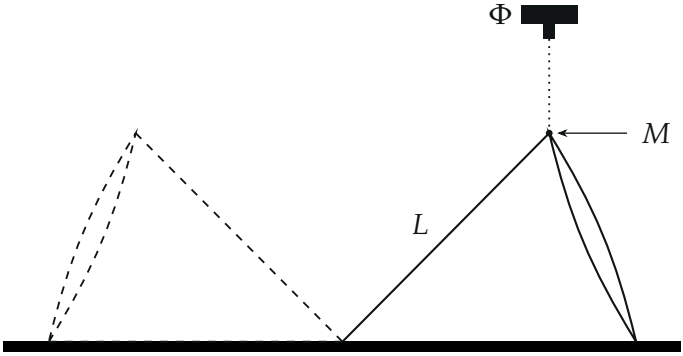


Рис. 1. Конус касается плоскости образующей; пунктиром — положение через пол-оборота вокруг вертикали

▲ **Решение. Что происходит.** Конус катится по плоскости, не проскальзывая, а его вершина O остаётся на месте: конус обкатывается вокруг вертикали через O. Центр основания C при этом идёт по горизонтальной окружности, а сам конус одновременно вращается вокруг своей оси. Снимок повторится, когда в одно и то же время выполнены два условия:

конус вернулся на прежнее место (целое число обходов k вокруг вертикали) и метка снова наверху (целое число оборотов N вокруг оси конуса). Класс задачи — кинематика качения твёрдого тела: ищем период обхода T_1, число оборотов вокруг оси за обход и наименьшее целое k, при котором N тоже целое.

Обозначения. $r = D/2 = 5$ см — радиус основания; h — высота конуса; α — угол между осью и образующей; K — точка основания, лежащая на плоскости (конец образующей, по которой конус касается плоскости), $OK = L$; ρ — расстояние от центра C основания до прямой OK (она же высота C над плоскостью); ω — угловая скорость вращения конуса вокруг прямой OK; R — радиус окружности, по которой идёт точка C; U — скорость точки C; T_1 — время одного обхода конуса вокруг вертикали.

1. Геометрия конуса. Высота $h = \sqrt{L^2 - r^2} = \sqrt{169 - 25} = 12$ см. Угол α при вершине: $\sin\alpha = r/L = 5/13$, $\cos\alpha = h/L = 12/13$. Ось OC конуса наклонена к плоскости на тот же угол α: плоскость касается конуса, а плоскость, в которой лежат ось и образующая OK, перпендикулярна касательной плоскости. Значит, все три точки O, K, C и самая верхняя точка основания лежат в одной вертикальной плоскости (рис. 2). Отсюда:

$$\rho = r\cos\alpha = 5\cdot\frac{12}{13} = \frac{60}{13}\text{ см}, \qquad R = h\cos\alpha = 12\cdot\frac{12}{13} = \frac{144}{13}\text{ см}.$$

Здесь ρ — высота точки C над плоскостью, R — её горизонтальное расстояние от вершины.

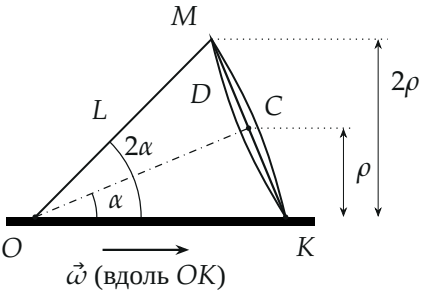


Рис. 2. Сечение через ось: K — касание, M — верх основания, $KM = D$

Обратите внимание. Метка M лежит на конце диаметра, второй конец которого — точка касания K. Именно поэтому в самом верху оказывается точка основания, диаметрально противоположная точке касания.

2. Мгновенная ось и скорость U. Конус катится без проскальзывания, поэтому все точки образующей OK неподвижны, и в каждый момент конус как твёрдое тело поворачивается вокруг этой образующей с угловой скоростью ω (мгновенная ось). Скорость точки тела равна ω, умноженной на её расстояние до мгновенной оси. Дальше всех от прямой OK верхняя точка основания (там сейчас метка M): её расстояние до OK равно $L\sin 2\alpha = 2\rho = 120/13$ см, а остальные точки ободка и боковой поверхности ближе (рис. 2). Значит, максимальная скорость точек конуса есть скорость метки в верхнем положении:

$$V = \omega \cdot 2\rho.$$

Центр основания C — середина отрезка KM, поэтому его скорость равна полусумме скоростей концов диаметра: $U = \dfrac{0+V}{2} = \dfrac{V}{2}$. Второй путь: $U = \omega\rho = \dfrac{V}{2\rho}\,\rho$ — так же. Тогда $U = 0{,}5$ м/с, и она постоянна, как сказано в условии.

3. Период обхода вокруг вертикали. Центр C равномерно движется по окружности радиуса R со скоростью U (рис. 3), поэтому

$$T_1 = \frac{2\pi R}{U} = \frac{4\pi R}{V} = \frac{4\pi \cdot 0{,}1108\text{ м}}{1\text{ м/с}} = \frac{144\pi}{325}\text{ с} \approx 1{,}39\text{ с}.$$

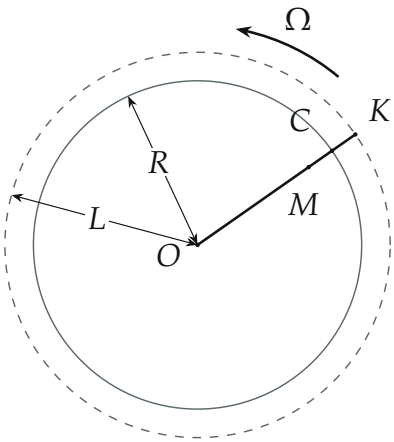


Рис. 3. Вид сверху: проекции точек K, C и M лежат на одном луче из O; луч обегает окружность. Пунктир — след ободка (радиус L), сплошная — путь точки C (радиус R)

4. Сколько оборотов делает конус вокруг своей оси за один обход. Основание касается плоскости не в одной точке: за обход точка касания K описывает на плоскости окружность радиуса L, длиной $2\pi L$, а ободок основания катится по ней без проскальзывания (рис. 3). Длина ободка πD. Метка вернётся на то же место ободка, когда по окружности пройдёт целое число длин ободка:

$$N_1 = \frac{2\pi L}{\pi D} = \frac{2L}{D} = \frac{26}{10} = 2{,}6 \text{ оборота за время } T_1.$$

Тот же результат даёт отношение угловых скоростей. Полное вращение конуса есть сумма вращения вокруг вертикали с угловой скоростью Ω и вращения вокруг оси конуса с угловой скоростью s; результирующий вектор $\vec{\omega}$ лежит на плоскости вдоль OK, поэтому его вертикальная составляющая равна нулю: $\Omega = s\sin\alpha$, откуда $s/\Omega = 1/\sin\alpha = L/r = 13/5 = 2{,}6$ — в точности N_1.

5. Когда снимок повторится. Для повторения снимка конус должен вернуться на прежнее место: $T = kT_1$, k — целое. Метка снова окажется наверху, если за это время конус сделает целое число оборотов вокруг

оси:

$$N = 2{,}6\,k = \frac{13}{5}\,k \quad \text{— целое.}$$

Дробь $13/5$ несократима, поэтому наименьшее k равно 5 (тогда $N = 13$). При меньших k метка окажется где-то на ободке, но не наверху. На рис. 4 это видно по точкам касания ободка, диаметрально противоположной метке: после каждого оборота вокруг оси конуса они сдвигаются по окружности на $\pi D/L = 10\pi/13$, и только на 13-м шаге, сделав ровно пять кругов, возвращаются в начальную точку.

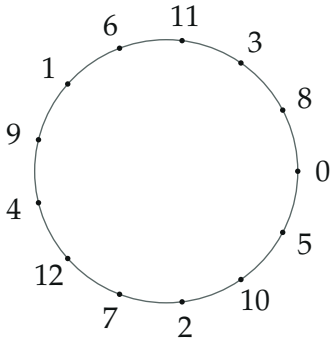


Рис. 4. Положения точки касания ободка, диаметрально противоположной метке, при $j = 0, 1, 2, \ldots$ оборотах вокруг оси; круг замыкается на $j = 13$

Итак, $T = 5T_1$:

$$T = 5 \cdot \frac{2\pi R}{U} = \frac{5\pi\,(4L^2 - D^2)}{VL} = \frac{5\pi \cdot 576\ \text{см}^2}{100\ \text{см/с} \cdot 13\ \text{см}} = \frac{144\pi}{65}\ \text{с} \approx 7\ \text{с}.$$

Здесь использовано $R = h^2/L = (4L^2 - D^2)/(4L)$.

Проверка. Размерность: $\text{см}^2/(\text{см/с} \cdot \text{см}) = \text{с}$. Предел: при $D \to 2L$ конус сплющивается в диск, $R \to 0$ и $T \to 0$: диск обкатывается на месте. Смысл: метка возвращается наверх лишь через 13 оборотов конуса вокруг оси, а это ровно пять обходов вокруг вертикали.

Ответ. $T = \dfrac{5\pi\,(4L^2 - D^2)}{VL} = \dfrac{144\pi}{65}\ \text{с} \approx 7\ \text{с}.$