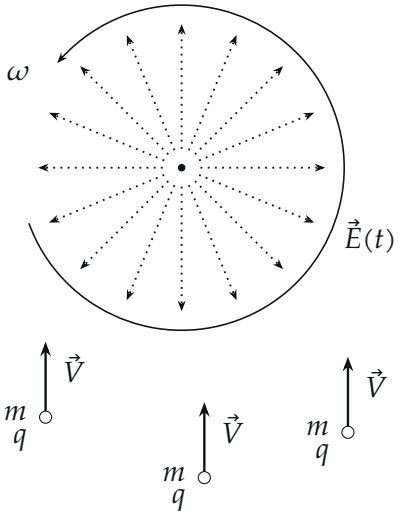
Пылинки во вращающемся поле

Задача 7. [МОШ 2016/17, 11 класс, задача 7] Одинаковые пылинки, имеющие заряд $q = 1$ пКл, массу $m = 1$ мг и летящие с одинаковой начальной скоростью $\vec{V}$, модуль которой равен 2 м/с, попадают на некоторое время в область, в которой создано электрическое поле. Модуль вектора напряженности этого поля не меняется со временем и равен $E = 10$ кВ/см, а вектор напряженности вращается с постоянной угловой скоростью $\omega = 2$ рад/с в одной плоскости с векторами скоростей частиц (см. рисунок).



1) С какой максимальной по модулю скоростью u могут вылетать некоторые пылинки из области действия электрического поля?
2) Какого наибольшего значения может достигать угол β между вектором конечной скорости и начальным направлением движения (угол отклонения) некоторых пылинок, если время их пребывания в поле равно $\tau = 0{,}25$ с?
3) До какого значения τ_0 надо изменить длительность пребывания некоторых пылинок в данном поле для того, чтобы наибольший

угол их отклонения достиг своего максимально возможного значения? Чему равен максимально возможный угол отклонения β_0?

Взаимодействие пылинок друг с другом и влияние на них других сил пренебрежимо мало.

▲ **Решение. Что происходит.** На пылинку действует только электрическая сила $q\vec{E}(t)$. По модулю она постоянна, а направление равномерно вращается, поэтому проще следить не за скоростью, а за импульсом: изменение импульса равно сумме малых импульсов силы $q\vec{E}\,dt$, и эти малые векторы, поставленные друг за другом, образуют дугу окружности (рис. 2). Конечный импульс — сумма начального $m\vec{V}$ и хорды этой дуги. Дальше три вопроса — это три вопроса о том, как сложить два вектора, один из которых (хорда) можно поворачивать, потому что пылинки влетают в поле в разные моменты, а значит, при разном направлении $\vec{E}$.

Обозначения. $\vec{p}_0 = m\vec{V}$ — начальный импульс, $p_0 = mV = 2 \cdot 10^{-6}$ кг·м/с; $\vec{p}$ — импульс при вылете; $\Delta\vec{p} = \vec{p} - \vec{p}_0$; $F = qE = 10^{-12} \cdot 10^6 = 10^{-6}$ Н — модуль силы ($E = 10$ кВ/см $= 10^6$ В/м); $\rho = F/\omega$ — радиус окружности, о которой пойдёт речь; τ — время пребывания в поле.

Обратите внимание. В условии $E = 10$ кВ/см. При 10 кВ/м сила была бы в сто раз меньше, и скорость изменилась бы не больше чем на 0,01 м/с — ответ 3 м/с не получился бы. Здесь же поле меняет скорость на величину порядка половины начальной.

1. Закон изменения импульса. Для пылинки (поле не зависит от места, значит, сила не зависит от положения пылинки):

$$d\vec{p} = q\vec{E}(t)\,dt, \qquad \Delta\vec{p} = \int q\vec{E}\,dt.$$

2. Построение суммы. Отложим малые векторы $q\vec{E}\,dt$ подряд: каждый имеет длину $F\,dt$ и повёрнут на $\omega\,dt$ относительно предыдущего (рис. 2а). Такая ломаная — дуга окружности: за время τ вектор силы поворачивается на угол $\omega\tau$, а длина дуги $s = F\tau$. Радиус по длине дуги и углу

$$\rho = \frac{s}{\omega\tau} = \frac{F}{\omega} = \frac{qE}{\omega} = 5 \cdot 10^{-7} \text{ кг} \cdot \text{м/с},$$

а сама сумма $\Delta\vec{p}$ — хорда дуги: $\Delta p = 2\rho \sin\dfrac{\omega\tau}{2}$. Вектор силы в каждый момент направлен по касательной к дуге — это и есть «сумма по дуге».

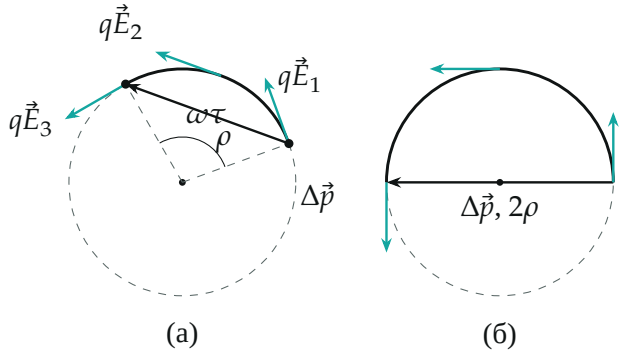


Рис. 2. Изменение импульса $\Delta\vec{p}$ — хорда дуги окружности радиуса $\rho = qE/\omega$; касательная в каждой точке дуги — направление силы в этот момент. (а) произвольное время (угол $\omega\tau$ условно); (б) $\omega\tau = \pi$, хорда — диаметр

3. Направление хорды. Пылинка влетает в поле, когда вектор $\vec{E}$ направлен как угодно (на рис. 1 показаны все его положения), поэтому дугу, а с ней и хорду $\Delta\vec{p}$ можно повернуть вокруг точки приложения на любой угол по отношению к $\vec{p}_0$. Длина хорды при данном τ не меняется, меняется её направление относительно начального импульса.

Пункт 1.

4. Наибольший модуль импульса. Модуль суммы двух векторов не больше суммы модулей, и равенство бывает при одинаковом направлении:

$$p = |\vec{p}_0 + \Delta\vec{p}| \le p_0 + \Delta p.$$

Хорда $\Delta p = 2\rho\sin(\omega\tau/2)$ не длиннее диаметра, $\Delta p \le 2\rho$, и 2ρ достигается при $\omega\tau = \pi$ (полуокружность, рис. 2б). Выбрав пылинки с подходящей фазой поля, получим хорду вдоль $\vec{V}$ (рис. 3):

$$mu = mV + 2\rho, \qquad u = V + \frac{2qE}{m\omega} = 2 + \frac{2\cdot 10^{-6}}{10^{-6}\cdot 2}\cdot 1 = 3 \text{ м/с}.$$

Здесь $2qE/(m\omega) = \dfrac{2\cdot 10^{-6}\text{ Н}}{10^{-6}\text{ кг}\cdot 2\text{ с}^{-1}} = 1$ м/с.

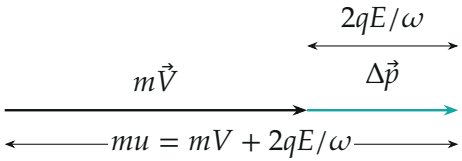


Рис. 3. Наибольший конечный импульс: хорда 2ρ направлена вдоль начального импульса

Пункт 2.

5. Угол отклонения при заданном τ. Длина хорды: $\Delta p = 2\rho \sin\dfrac{\omega\tau}{2}$ при $\omega\tau = 0{,}5$:

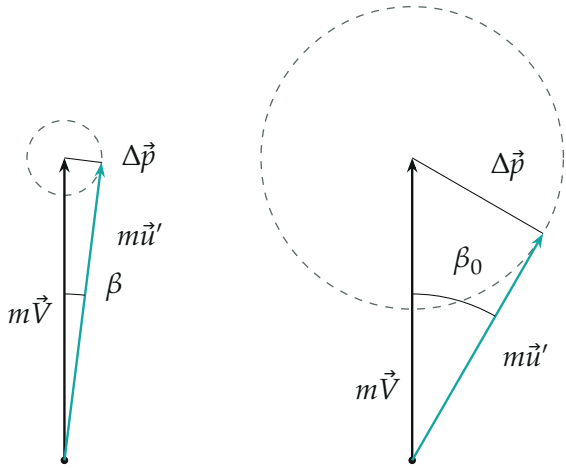
$$\frac{\Delta p}{p_0} = \frac{2qE}{mV\omega}\sin\frac{\omega\tau}{2} = \frac{1}{2}\sin\frac{1}{4} = 0{,}124 < 1.$$

Конец вектора $\vec{p} = \vec{p}_0 + \Delta\vec{p}$ лежит на окружности радиуса Δp с центром в конце вектора $\vec{p}_0$ (рис. 4а): хорду можно поворачивать, а длина фиксирована. Из начала координат этот набор концов виден под наибольшим углом к $\vec{p}_0$, когда направление $\vec{p}$ касается окружности, то есть $\vec{p} \perp \Delta\vec{p}$ (касательная к окружности перпендикулярна радиусу). Из прямоугольного треугольника

$$\sin\beta = \frac{\Delta p}{p_0} \implies \beta = \arcsin\left(\frac{2qE}{mV\omega}\sin\frac{\omega\tau}{2}\right)$$
$$= \arcsin\left(\frac{1}{2}\sin\frac{1}{4}\right) \approx 0{,}124 \text{ рад} \approx 7^\circ.$$

Условие $\Delta p < p_0$ существенно: иначе окружность охватывает начало координат, и пылинка могла бы вылететь в любую сторону. Здесь оно выполнено с запасом.

Тот же результат даёт второй способ: пусть γ — угол между $\Delta\vec{p}$ и $\vec{p}_0$, тогда $\operatorname{tg}\beta = \dfrac{\Delta p\sin\gamma}{p_0 + \Delta p\cos\gamma}$. Производная по γ равна нулю при $\cos\gamma = -\Delta p/p_0$, откуда $\sin\beta = \Delta p/p_0$.



(а) $\tau = 0{,}25$ с (б) $\tau_0 = \pi/\omega$

Рис. 4. Конец вектора $\vec{p}$ лежит на окружности радиуса Δp вокруг конца $m\vec{V}$; наибольший угол отклонения — когда $\vec{p}$ касается окружности (масштаб импульсов одинаковый на обоих рисунках)

Пункт 3.

6. Лучшее время пребывания. Угол $\beta = \arcsin(\Delta p/p_0)$ растёт вместе с Δp, а $\Delta p = 2\rho\sin(\omega\tau/2)$ наибольшая при $\omega\tau/2 = \pi/2$:

$$\tau_0 = \frac{\pi}{\omega} = \frac{\pi}{2}\text{ с} \approx 1{,}57\text{ с}, \qquad \beta_0 = \arcsin\frac{2qE}{mV\omega} = \arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6} = 30^\circ.$$

Те же β_0 получаются и при $\tau = (2k+1)\pi/\omega$ — наименьшее значение это $\tau_0 = \pi/2$ с.

Проверка. Размерность: qE/ω — сила на время, импульс; $2qE/(m\omega)$ — скорость в м/с. Предел $E \to 0$: $u \to V$, $\beta \to 0$. Смысл: при $\omega\tau = \pi$ сила успевает развернуться от толкающей вдоль $\vec{V}$ до тормозящей, и набранный импульс максимален — ни до, ни после этого момента сумма не больше.

Ответ. 1) $u = V + \dfrac{2qE}{m\omega} = 3$ м/с; 2) $\beta = \arcsin\left(\frac{1}{2}\sin\frac{1}{4}\right) \approx 0{,}124$ рад $\approx 7^\circ$; 3) $\tau_0 = \dfrac{\pi}{\omega} \approx 1{,}57$ с, $\beta_0 = \arcsin\dfrac{2qE}{mV\omega} = 30^\circ$.