Колебания шариков на стержне и цилиндре

Задача 8. [МОШ 2016/17, 11 класс, задача 8] Два маленьких шарика массами m_1 и m_2 закреплены на концах тонкого жесткого очень легкого стержня длиной L. Этот стержень покоится на поверхности шероховатого горизонтального неподвижно закрепленного цилиндра радиусом R. В положении равновесия стержень горизонтален и перпендикулярен оси цилиндра (на рисунке показан вид со стороны торца цилиндра). Стержень поворачивают на малый угол таким образом, что он движется относительно цилиндра без проскальзывания, и отпускают. После этого начинаются колебания, в процессе которых стержень катается по поверхности цилиндра также без проскальзывания, а шарики движутся в плоскости рисунка. Чему равен период этих колебаний? Сопротивлением воздуха можно пренебречь.

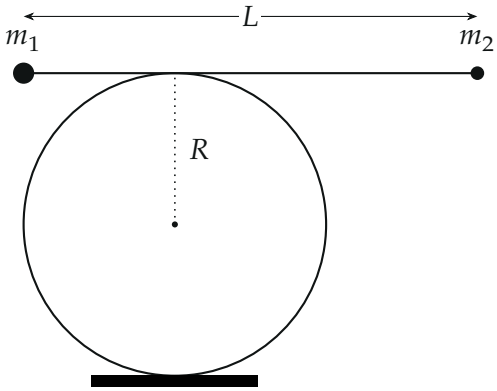


Рис. 1. Вид со стороны торца: стержень с шариками лежит на неподвижном цилиндре

▲ **Решение.** **Что происходит.** Стержень лёгкий, поэтому вся масса сосредоточена в двух шариках. Цилиндр неподвижен, стержень катится по нему без проскальзывания: в каждый момент точка касания P стержня неподвижна, и стержень поворачивается вокруг неё как вокруг мгновенной оси. Эта ось не стоит на месте — она сдвигается по цилиндру, и центр масс шариков при этом поднимается над положением равновесия: отсюда возвращающая сила. Силы $\vec{N}$ и $\vec{F}_{\text{тр}}$ приложены к неподвижной

точке стержня и работы не совершают, поэтому полная механическая энергия сохраняется, и задача сводится к энергии: потенциальная растёт как квадрат угла отклонения, кинетическая — как квадрат угловой скорости, то есть колебания гармонические.

Обозначения. $M = m_1 + m_2$; φ — угол наклона стержня к горизонту (рис. 3); P — точка касания; C — центр масс шариков; d_1, d_2 — расстояния от C до шариков, $d_1 + d_2 = L$; h_C, h_1, h_2 — высоты C и шариков над их положениями в равновесии.

1. Где центр масс. В равновесии силы $\vec{N}$ и $\vec{F}_{\text{тр}}$ приложены в точке P, значит, относительно неё сумма моментов тяжести шариков равна нулю: $m_1 g d_1 = m_2 g d_2$ (рис. 2). Вместе с $d_1 + d_2 = L$ получаем

$$d_1 = \frac{m_2}{M} L, \qquad d_2 = \frac{m_1}{M} L.$$

Центр масс шариков лежит над точкой касания, значит, касание в равновесии — под ним.

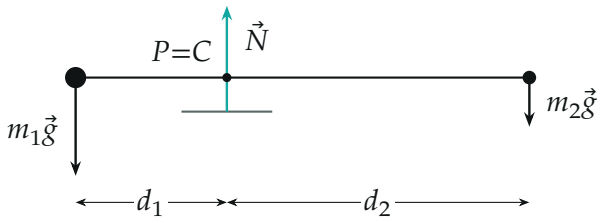


Рис. 2. Равновесие: касание под центром масс, $m_1 g d_1 = m_2 g d_2$; опора $\vec{N}$ уравновешивает $(m_1 + m_2)\vec{g}$. Для рисунка взято $m_1 = 2m_2$

2. Качение без проскальзывания. Пусть точка касания сместилась по цилиндру на дугу $R\varphi$, то есть радиус OP повернулся на угол φ (рис. 3). Стержень касается цилиндра и поэтому перпендикулярен OP: он наклонён к горизонту на тот же угол φ. Проскальзывания нет, поэтому на стержне от точки C (в равновесии она лежала в точке касания) до нового касания отложена такая же длина $R\varphi$.

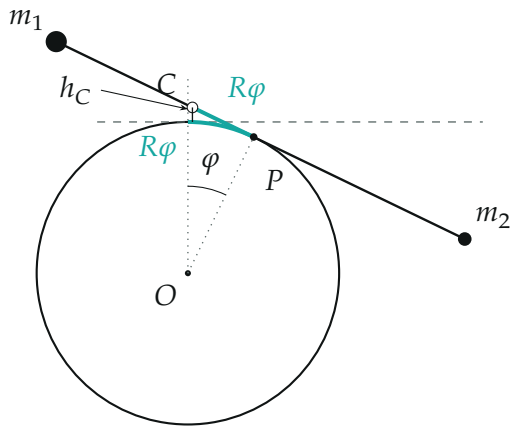


Рис. 3. Стержень откатился на угол φ (угол условно велик). Одна и та же длина $R\varphi$ отложена по цилиндру и по стержню; центр масс C поднялся на h_C над пунктиром

3. Потенциальная энергия. Высота точки стержня, лежащей на расстоянии ξ от P по направлению наклона стержня (вниз по стержню — в сторону m_2), над центром цилиндра равна $R\cos\varphi - \xi\sin\varphi$. Центр масс C находится на расстоянии $\xi_C = -R\varphi$ от P, шарики — на расстояниях $-R\varphi - d_1$ и $-R\varphi + d_2$ (в равновесии высота всех точек стержня над центром цилиндра равна R). Для малых φ ($\cos\varphi \approx 1 - \varphi^2/2$, $\sin\varphi \approx \varphi$) приращения высот:

$$h_C = R\cos\varphi + R\varphi\sin\varphi - R \approx \frac{R\varphi^2}{2},$$

$$h_1 \approx d_1\varphi + \frac{R\varphi^2}{2}, \qquad h_2 \approx -d_2\varphi + \frac{R\varphi^2}{2}.$$

Изменение потенциальной энергии шариков:

$$\Delta U = m_1 g h_1 + m_2 g h_2$$
$$= (m_1 d_1 - m_2 d_2) g\varphi + \frac{(m_1 + m_2) g R\varphi^2}{2} = \frac{MgR}{2}\varphi^2.$$

Слагаемые, линейные по φ, взаимно уничтожились, так как $m_1 d_1 = m_2 d_2$ — это то же условие равновесия. Остался квадрат угла: центр масс

поднимается как $R\varphi^2/2$, то есть положение равновесия устойчиво.

4. Кинетическая энергия. Стержень в каждый момент поворачивается вокруг неподвижной точки касания с угловой скоростью $\dot\varphi$ (при качении точка касания неподвижна, а стержень повёрнут на угол φ). Скорость шарика равна $\dot\varphi$, умноженной на его расстояние до P; для малых φ эти расстояния — d_1 и d_2 (поправка $R\varphi$ даёт вклад третьего порядка малости в энергию):

$$K = \frac{1}{2}m_1(\dot\varphi d_1)^2 + \frac{1}{2}m_2(\dot\varphi d_2)^2 = \frac{1}{2}\,\dot\varphi^2\,\frac{m_1m_2^2 + m_2m_1^2}{M^2}\,L^2 = \frac{1}{2}\,\frac{m_1m_2L^2}{M}\,\dot\varphi^2.$$

Кинетическая энергия не зависит от угла φ — только от скорости (рис. 4).

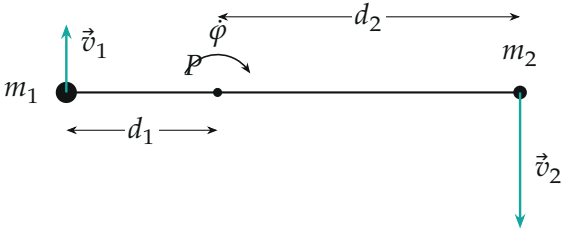


Рис. 4. Скорости шариков при повороте вокруг P: $v_1 = \dot\varphi d_1$, $v_2 = \dot\varphi d_2$, векторы перпендикулярны стержню

5. Уравнение колебаний. Механическая энергия сохраняется:

$$\frac{1}{2}\,\frac{m_1m_2L^2}{M}\,\dot\varphi^2 + \frac{MgR}{2}\,\varphi^2 = \text{const}.$$

Продифференцируем по времени и сократим на $\dot\varphi$:

$$\ddot\varphi = -\Omega^2\varphi, \qquad \Omega^2 = \frac{MgR}{m_1m_2L^2/M} = \frac{M^2gR}{m_1m_2L^2}.$$

Это уравнение гармонических колебаний, период

$$T = \frac{2\pi}{\Omega} = \frac{2\pi L}{m_1 + m_2}\sqrt{\frac{m_1 m_2}{gR}}.$$

Обратите внимание. Кинетическую энергию считаем вращением вокруг точки касания, а не вокруг центра масс: при качении без проскальзывания неподвижна именно она. А потенциальная энергия — это не «шарики качаются как маятник»: каждый шарик в первом порядке поднимается или опускается на $d\varphi$, эти вклады взаимно уничтожаются, и остаётся только подъём центра масс на $R\varphi^2/2$.

Проверка. Размерность: $\frac{L}{M}\sqrt{\frac{m^2}{gR}}$ — длина, делённая на $\sqrt{\text{м}^2/\text{с}^2}$, то есть секунды. Предел $m_2 \gg m_1$: точка касания почти совпадает с тяжёлым шариком, $T \to 2\pi L\sqrt{m_1/(m_2 gR)}$: лёгкий шарик на длинном плече раскачивает тяжёлый, поднимающийся как $R\varphi^2/2$, — совпадает с прямой оценкой $\frac{1}{2}m_1 L^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}m_2 gR\varphi^2$. Одинаковые шарики: $T = \pi L/\sqrt{gR}$. Дополнительно: период, полученный численно из точных координат шариков (без разложений), совпал с формулой до шестой значащей цифры.

Ответ. $T = \frac{2\pi}{\Omega} = \frac{2\pi L}{m_1 + m_2}\sqrt{\frac{m_1 m_2}{gR}}.$