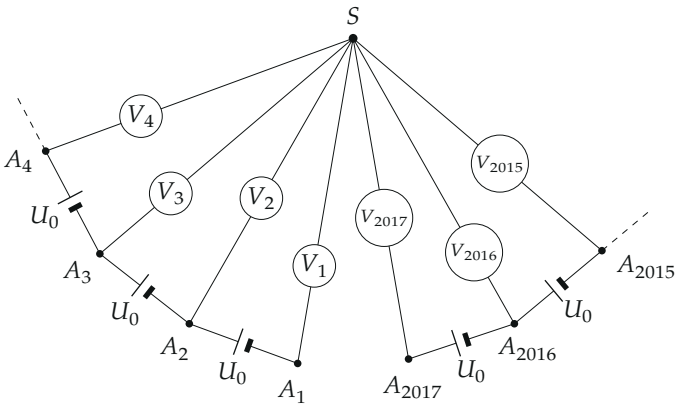
Вольтметры в многоугольнике батарей

Задача 10. [МОШ 2016/17, 11 класс, задача 10] Точки $A_1, \ldots, A_{2017}$ — вершины правильного 2017-угольника, точка S — его центр. Между соседними вершинами многоугольника (за исключением 1-й и 2017-й) включены одинаковые идеальные батарейки с напряжением U_0 так, как показано на рисунке. Также между каждой вершиной и точкой S включен вольтметр с соответствующим номером. Все вольтметры одинаковые, в точке S есть электрический контакт.



1) На сколько отличаются показания первого и десятого вольтметров?
2) Что показывает вольтметр с номером N?
3) Определите номер вольтметра с нулевыми показаниями.

▲ **Решение. Что происходит.** Батарейки включены цепочкой от A_1 до A_{2017}, между A_{2017} и A_1 батарейки нет (разрыв внизу рисунка). Идеальная батарейка поддерживает напряжение U_0 при любом токе, поэтому разности потенциалов между соседними вершинами заданы, и потенциалы всех вершин известны с точностью до одной общей постоянной. Все вольтметры сходятся в точку S, у которой одна неизвестная — её потенциал; он находится из первого правила Кирхгофа для S: через узел заряды не накапливаются. Дальше показание каждого вольтметра есть разность потенциалов его вершины и S.

Обозначения. φ_k — потенциал вершины A_k; φ_S — потенциал точки S; r — сопротивление каждого вольтметра; I_k — ток через k-й вольтметр от вершины к S; $V_k = \varphi_k - \varphi_S$ — показание k-го вольтметра. На рисунке плюс батарейки (длинная пластина) обращён к вершине с большим номером: потенциал растёт с номером. При обратном включении все V_k меняют знак, а модули остаются теми же (вольтметр с обратной полярностью показал бы то же число).

1. Потенциалы вершин. Каждая батарейка поднимает потенциал на U_0 при переходе к следующей вершине: $\varphi_{k+1} - \varphi_k = U_0, k = 1, \ldots, 2016$, откуда

$$\varphi_k = \varphi_1 + (k-1)U_0.$$

Пункт 1.

2. Разность показаний. Оба вольтметра подключены к одной точке S, поэтому потенциал S при вычитании сокращается:

$$V_{10} - V_1 = \varphi_{10} - \varphi_1 = 9U_0.$$

Показания отличаются на $9U_0$; потенциал S для ответа на этот вопрос не нужен.

Пункт 2.

3. Потенциал точки S. К S подключены только вольтметры, поэтому по первому правилу Кирхгофа сумма токов, идущих через них в S, равна нулю. Токи равны $I_k = (\varphi_k - \varphi_S)/r$, а так как сопротивления одинаковы, r сокращается и остаётся равенство нулю суммы разностей потенциалов:

$$\sum_{k=1}^{2017}(\varphi_k - \varphi_S) = 0 \implies \varphi_S = \frac{1}{2017}\sum_{k=1}^{2017}\varphi_k = \varphi_1 + \frac{U_0}{2017}\sum_{k=1}^{2017}(k-1)$$

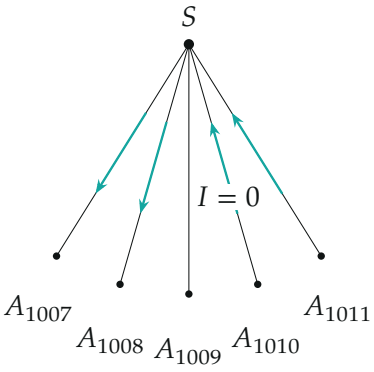
$$\varphi_S = \varphi_1 + U_0\,\frac{2016\cdot 2017/2}{2017} = \varphi_1 + 1008\,U_0.$$

Потенциал S — среднее потенциалов вершин: вольтметры одинаковы, поэтому «голосуют» с равным весом.

Тот же результат даёт второй способ, по симметрии: вершины k и

$2018 - k$ стоят симметрично относительно A_{1009} (число 1009 — середина номеров), и $\varphi_k + \varphi_{2018-k} = 2\varphi_{1009}$. Если $\varphi_S = \varphi_{1009}$, то токи этих двух вольтметров равны по модулю и противоположны, а ток 1009-го равен нулю: вся сумма токов равна нулю (рис. 2), то есть первое правило Кирхгофа выполнено; решение единственное, потому что сумма токов монотонно убывает с ростом φ_S. Значит, $\varphi_S = \varphi_{1009} = \varphi_1 + 1008\,U_0$.

ток из S в вершину: $I_{1009-j} = -jU_0/r$



ток из вершины в S: $I_{1009+j} = +jU_0/r$

Рис. 2. Токи вольтметров в узел S (показаны вершины около середины): токи в S приходят от вершин с большим потенциалом и уходят к вершинам с меньшим; пары $1009 \pm j$ дают одинаковые по модулю противоположные токи

4. Показание N-го вольтметра.

$$V_N = \varphi_N - \varphi_S = (N-1)U_0 - 1008\,U_0 = (N-1009)\,U_0.$$

Показание — модуль напряжения: вольтметр показывает $|N - 1009|\,U_0$ (рис. 3). Так, $V_1 = -1008\,U_0$ и $V_{10} = -999\,U_0$, что согласуется с пунктом 1.

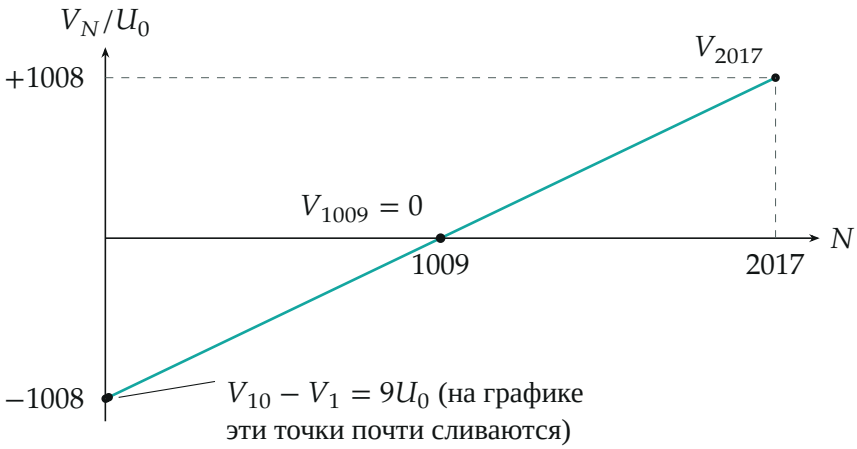


Рис. 3. Напряжение вольтметра как функция номера: прямая с наклоном U_0 на один номер, нуль в середине

Пункт 3.

5. Нулевое показание. $V_N = 0$ при $N = 1009$ — и только при нём, так как V_N меняется строго монотонно с N. Это средняя вершина: номеров 2017 нечётное число, её номер $(2017 + 1)/2 = 1009$.

Обратите внимание. Ответ не зависит от величины сопротивления вольтметров, но существенно, что оно у всех одинаково: именно поэтому потенциал S — простое среднее потенциалов вершин. Токи через вольтметры идут и через батарейки, но идеальные батарейки сохраняют своё напряжение U_0 при любом токе.

Проверка. Размерность: V_N — вольты, U_0 — вольты. Малый случай, трёхугольник: $\varphi = 0, U_0, 2U_0$; $\varphi_S = U_0$; показания $-U_0, 0, +U_0$ — формула $(N-2)U_0$, середина $N = (3+1)/2 = 2$. Сумма показаний с учётом знака равна нулю: $\sum(N-1009) = 0$, как и требует первое правило Кирхгофа. Смысл: «разрыв» многоугольника внизу делает показания линейными по номеру, а S выравнивает их вокруг нуля.

Ответ. 1) $\Delta V = 9U_0$; 2) $V_N = |(N - 1009)\,U_0|$; 3) нулевые показания у вольтметра с номером 1009.