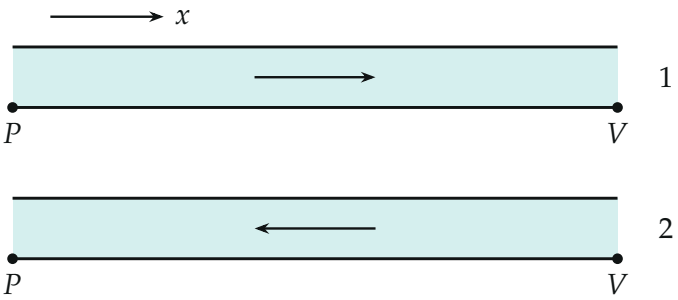
# Прогулка по берегу и лодка

**Задача 1.** [МОШ 2016-17, 7 класс, задача 1] Петя прогулялся по речному берегу от деревни Петрово до деревни Васино и, нигде не задерживаясь, вернулся назад. Его скорость во время прогулки была почти постоянной и равной скорости течения реки. Одновременно с Петей тем же самым маршрутом на лодке отправился Вася. До Васино он добрался втрое быстрее Пети и тоже, не задерживаясь, вернулся на лодке в Петрово. Сколько времени плавал на лодке Вася, если прогулка Пети длилась 120 минут? Через какое время после старта мальчики встретились? Определите, в какие моменты времени после старта расстояние между мальчиками было максимальным. Скорость лодки относительно воды можно считать постоянной.




*Поясняющий рисунок. Река (бирюзовая полоса), берег с деревнями P (Петрово) и V (Васино); стрелка в реке — течение. Случай 1: течение от Петрова к Васино, случай 2: наоборот.*

▲ **Решение. Что происходит.** Направление течения в условии не задано, поэтому случаев два. Лодка идёт вниз по течению быстрее, чем против; скорость Пети постоянна, значит, его график координаты — ломаная из двух прямых. Всё решение — графики координат от времени и их пересечения.

**Обозначения.** Ось $x$ — вдоль берега от Петрова к Васино, начало в Петрове. $L$ — расстояние между деревнями; $u$ — скорость течения и скорость Пети; $v$ — скорость лодки относительно воды; $t$ — время

от старта. Единицы: время в минутах, расстояние в «$u$-минутах» (путь, который Петя проходит за минуту).

**1. Длина пути и время Васи туда.** Петя идёт туда и обратно с постоянной скоростью $u$: $2L/u = 120$ мин, откуда $L = 60u$ (мин). Петя в Васино в момент $t = 60$ мин. Вася дошёл втрое быстрее: за 20 мин; его скорость относительно берега при этом $L/20 = 3u$.

**Случай 1: течение вдоль оси $x$.** Скорость лодки относительно берега — сумма скорости лодки относительно воды и скорости воды (закон сложения скоростей); в проекции на ось $x$ туда $v + u$, назад $-(v - u)$.

**2. Скорость лодки и время обратно.**

$$v+u = 3u \;\Rightarrow\; v = 2u; \qquad \text{назад: } |v_x| = v-u = u, \quad t_{\text{назад}} = \frac{L}{u} = 60 \text{ мин}.$$

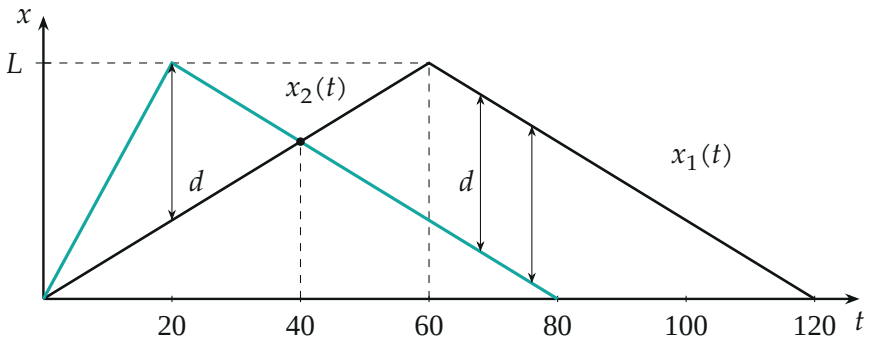
Вася плавал $20 + 60 = 80$ мин.

**3. Встреча.** Координаты на обратном пути Васи ($t > 20$ мин):

$$x_1 = ut, \qquad x_2 = L - u(t - 20) = 80u - ut.$$

Встреча при $x_1 = x_2$: $2ut = 80u$, $t = 40$ мин, на расстоянии $40u$ от Петрова.

**4. Наибольшее расстояние.** Расстояние $d = |x_2 - x_1|$ растёт, пока Вася идёт к Васино: $d = 3ut - ut = 2ut$, к $t = 20$ мин $d = 40u$. Дальше $d = |80u - 2ut|$: падает до нуля в момент встречи, затем растёт и в момент $t = 60$ мин (Петя в Васино, $x_1 = 60u$, Вася на $x_2 = 20u$) снова $40u$. Потом Петя идёт назад, $x_1 = 120u - ut$, Вася — $x_2 = 80u - ut$: расстояние постоянно $40u$ до момента $t = 80$ мин, когда Вася в Петрове. После этого $d = x_1$ убывает. Максимум $40u$ достигается при $t = 20$ мин и на всём отрезке от 60 до 80 мин.



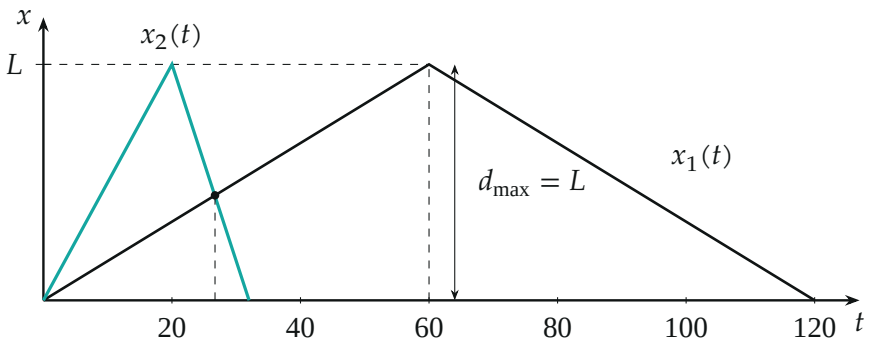

*Случай 1. Чёрная ломаная — Петя $x_1(t)$, бирюзовая — Вася $x_2(t)$; $t$ в минутах, $x$ в «$u$-минутах». Встреча в точке $(40; 40)$, зазор $d = 40u$ при $t = 20$ мин и на отрезке 60–80 мин.*

**Случай 2: течение против оси $x$.** Теперь вниз по течению лодка идёт к Петрову.

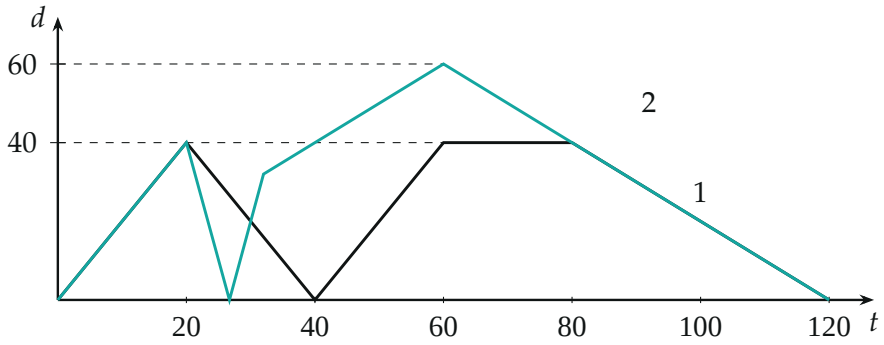
**5. Скорость лодки.** Туда против течения: $v - u = 3u$, $v = 4u$. Назад по течению: $v + u = 5u$, время $t_{\text{назад}} = L/(5u) = 12$ мин. Вася плавал $20 + 12 = 32$ мин.

**6. Встреча.** Обратный путь ($t > 20$ мин): $x_2 = L - 5u(t - 20) = 160u - 5ut$. $x_1 = x_2$: $6ut = 160u$, $t = 80/3 \approx 26{,}7$ мин.

**7. Наибольшее расстояние.** До $t = 20$ мин: $d = 2ut \leq 40u$. После встречи Вася обгоняет Петю: $d = x_1 - x_2 = 6ut - 160u$, в момент $t = 32$ мин ($x_2 = 0$) $d = 32u < 40u$. Вася остаётся в Петрове, а Петя уходит к Васино: $d = x_1 = ut$, растёт до $t = 60$ мин, где $d = 60u$. Потом Петя идёт назад, $d$ убывает. Максимум $60u$ — единственный, при $t = 60$ мин (он больше $40u$ первого участка).



*Случай 2. Встреча при $t = 80/3 \approx 26{,}7$ мин; расстояние максимально при $t = 60$ мин: Петя в Васино, Вася в Петрове.*




*Расстояние $d(t)$ между мальчиками (в «и-минутах»): чёрная линия — случай 1 ($d_{\max} = 40$), бирюзовая — случай 2 ($d_{\max} = 60$).*

**Обратите внимание.** Ответ при втором направлении течения не просто «ещё одно число»: максимум расстояния смещается с «лодка у Васино» на «лодка уже в Петрове, пешеход у Васино».

**Проверка.** При $v = 2u$ лодка идёт относительно берега $3u$ вниз и $u$ вверх; $t = \dfrac{L}{v+u} + \dfrac{L}{v-u} = 20 + 60 = 80$ мин. Для случая 2 $t = 60\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5}\right) = 32$ мин. Расхождение с ответом организаторов только в округлении: 26,6 в их ответе — усечённое $80/3$.

Смысл: график координат превращает «кто кого и когда» в пересечения линий, а расстояние между мальчиками — в вертикальный зазор между ними.

**Ответ.** Течение от Петрова к Васино: 1) 80 минут; 2) через 40 минут после старта; 3) через 20 минут и с 60-й по 80-ю минуту. Течение от Васино к Петрову: 1) 32 минуты; 2) через 26,7 минуты ($80/3$); 3) через 60 минут после старта.