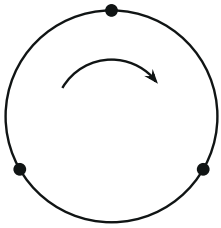
Три гонщика на мотовелотреке

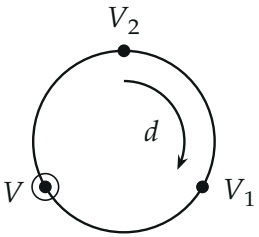
Задача 2. [МОШ 2016-17, 7 класс, задача 2] Вова, Саша и Егор одновременно начали движение с постоянными скоростями в одном направлении (по часовой стрелке) из трех равноудаленных друг от друга точек кругового мотовелотрека.



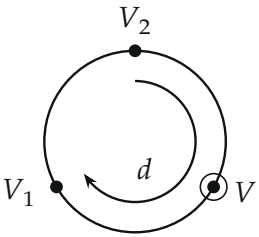
Через некоторое время Саша, движущийся на мотоцикле с самой большой скоростью, поравнялся с Вовой и Егором, которые в тот же момент встретились в первый раз. Какая скорость V могла быть у Саши, если Егор и Вова ехали на велосипедах со скоростями $V_1 = 10$ км/ч и $V_2 = 20$ км/ч, соответственно? Известно, что скорость Саши не превышала 80 км/ч.

▲ **Решение. Что происходит.** Скорости Вовы и Егора известны, значит, момент их первой встречи определяется только тем, как далеко друг от друга они стартовали. Три точки делят трек на три равные дуги, а расставить гонщиков по ним можно двумя способами: Егор впереди Вовы на треть круга или на две трети. Для каждого способа находим момент встречи T, а потом спрашиваем, какой должна быть скорость Саши, чтобы он оказался там же, проехав целое число кругов.

Обозначения. L — длина трека; положение гонщика — длина дуги по ходу движения от точки старта Вовы; $V_1 = 10$ км/ч — Егор, $V_2 = 20$ км/ч — Вова, V — Саша; d — длина дуги от Вовы до Егора по ходу движения (Егор впереди); T — момент встречи.



$d = L/3$



$d = 2L/3$

Два способа расстановки (по часовой стрелке): слева Егор впереди Вовы на $L/3$, справа на $2L/3$. Стрелка внутри — дуга d от Вовы до Егора. Кольцом отмечен старт Саши — он оказывается и местом встречи.

1. Момент встречи Вовы и Егора. Вова быстрее Егора, едет в ту же сторону и догоняет его. При движении в одну сторону скорость сближения равна разности скоростей: $V_2 - V_1 = 10$ км/ч. Первая встреча — когда Вова сократит зазор d до нуля:

$$T = \frac{d}{V_2 - V_1} = \frac{d}{10\ \text{км/ч}}.$$

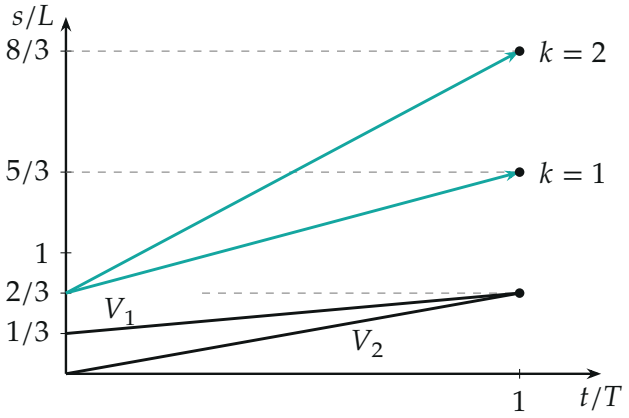
Вариант a: $d = L/3$**.** $T = L/30$ (в часах, L в км). Вова к этому моменту проехал $V_2 T = 2L/3$. Если Вова стартовал в точке 0, то Егор — в точке $L/3$, а Саша — в третьей точке, $2L/3$. Встреча произошла в точке $2L/3$ — ровно там, где стартовал Саша.

Вариант b: $d = 2L/3$**.** $T = L/15$, Вова проехал $V_2 T = 4L/3 = L + L/3$ — он в точке $L/3$ (один круг и треть). Егор стартовал в $2L/3$ и проехал $V_1 T = 2L/3$: тоже в точке $L/3$ после круга. Саша стартовал в $L/3$ — опять в точке встречи.

2. Условие для Саши. В обоих вариантах место встречи совпадает с местом старта Саши, значит, к моменту T Саша проехал целое число кругов k: $VT = kL$, то есть $V = kL/T$:

$$\text{a) } V = 30k \text{ км/ч}; \qquad \text{b) } V = 15k \text{ км/ч}, \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

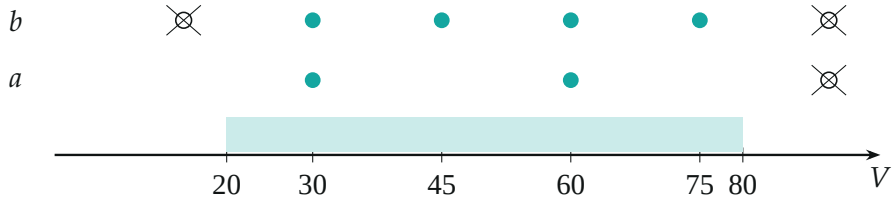
Целое k допустимо потому, что Саша мог сделать лишние круги: «лишний круг» ничего не меняет в точке, где он оказывается.



Вариант a: путь s, отсчитанный от старта Вовы без учёта «обнуления» на круге. Вова и Егор сходятся в точке $2L/3$; Саша стартует из неё же и приходит в ту же точку после одного ($V = 30$) или двух кругов ($V = 60$).

3. Отбор. Саша быстрее всех: $V > V_2 = 20$ км/ч, и $V \leq 80$ км/ч.

- вариант a: $k = 1$ даёт 30, $k = 2$ даёт 60, $k = 3$ даёт $90 > 80$ — не подходит;
- вариант b: $k = 1$ даёт $15 < 20$ — Саша не самый быстрый; $k = 2, 3, 4, 5$ дают 30; 45; 60; 75; $k = 6$ даёт $90 > 80$.



Шкала скоростей: бирюзовая полоса — допустимые значения ($20 < V \leq 80$), заливкой отмечены подходящие V, перечёркнуты кружки, выпавшие из-за ограничений.

Обратите внимание. Нельзя ограничиться одним вариантом расстановки и нельзя забыть про лишние круги Саши: из значений $15k$ и $30k$ подходят четыре, и два из них (30 и 60) годятся обоим вариантам расстановки.

Проверка. $V = 75$ км/ч, вариант b: $T = L/15$; Саша проехал $75 \cdot L/15 = 5L$ — пять кругов, на месте. Вова: $20L/15 = 4L/3$, Егор: $2L/3 + 10L/15 = 4L/3$ — та же точка. Значения скорости, не кратные 15, невозможны: иначе Саша не попал бы в точку встречи.

Смысл: что важно здесь — не сами числа, а то, что место встречи совпало со стартом Саши, поэтому подходит любая скорость, дающая целое число кругов за время T.

Ответ. $V = 30;\ 45;\ 60;\ 75$ км/ч.