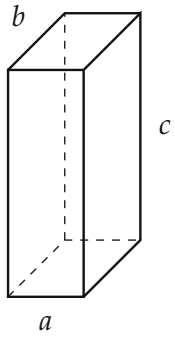
Лакированная картонная коробочка

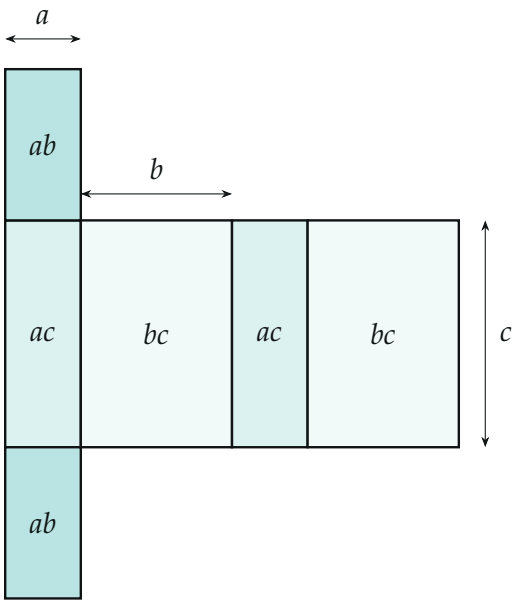
Задача 3. [МОШ 2016-17, 7 класс, задача 3] Из листа картона с поверхностной плотностью $\sigma = 400$ г/м^2 склеили закрытую со всех сторон коробочку в форме прямоугольного параллелепипеда со сторонами $a = 20$ см, $b = 40$ см, $c = 60$ см. Для большей прочности коробочку равномерно покрыли снаружи толстым слоем лака с плотностью $\rho = 1500$ кг/м^3. В результате масса коробочки оказалась равной $m = 1670$ г. Определите толщину h слоя лака. Шириной загибов картона при склеивании можно пренебречь.



Поясняющий рисунок: коробочка со сторонами a, b, c.

▲ **Решение.** **Что происходит.** У коробочки две оболочки одинаковой площади: картонная и лаковая, лежащая на картоне снаружи. Площадь картона и площадь лака — это полная площадь поверхности параллелепипеда S. Масса коробочки — сумма массы картона и массы лака, лак тонкий (миллиметр на десятки сантиметров), поэтому его объём — это площадь, умноженная на толщину.

Обозначения. S — площадь поверхности коробочки; $m_1 = \sigma S$ — масса картона; $m_2 = \rho S h$ — масса лака; σ — масса единицы площади картона. Все величины — в СИ: $\sigma = 0{,}4$ кг/м^2, $a = 0{,}2$ м, $b = 0{,}4$ м, $c = 0{,}6$ м, $m = 1{,}67$ кг.



Развёртка поверхности коробочки на шесть прямоугольников: две грани ab, две ac, две bc (масштаб: 1 см на рисунке — 20 см).

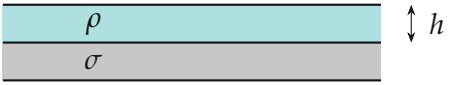
1. Площадь поверхности. Поверхность составлена из трёх пар одинаковых граней: две ab, две bc, две ac:

$$S = 2(ab + bc + ac) = 2(0{,}08 + 0{,}24 + 0{,}12)\ \text{м}^2 = 0{,}88\ \text{м}^2.$$

2. Масса картона. Поверхностная плотность — это масса, приходящаяся на единицу площади, так что $m_1 = \sigma S = 0{,}4 \cdot 0{,}88 = 0{,}352$ кг $= 352$ г.

3. Масса и объём лака. Остальное — лак: $m_2 = m - m_1 = 1{,}670 - 0{,}352 = 1{,}318$ кг. Объём лака $V_л = m_2/\rho$. С другой стороны, лаковый слой толщины h на поверхности площади S имеет объём $V_л = Sh$ (слой тонкий, углами и рёбрами пренебрегаем). Тогда

$$\rho Sh = m - \sigma S \quad \Rightarrow \quad h = \frac{m - \sigma S}{\rho S} = \frac{m - 2\sigma(ab + bc + ac)}{2\rho(ab + bc + ac)}.$$



Разрез стенки (внутри коробочки — снизу): серый слой — картон (поверхностная плотность σ), бирюзовый — лак (плотность ρ), толщина лака h. Толщины на рисунке сильно увеличены.

4. Число.

$$h = \frac{1{,}318\ \text{кг}}{1500\ \text{кг/м}^3 \cdot 0{,}88\ \text{м}^2} = \frac{1{,}318}{1320}\ \text{м} \approx 1{,}0 \cdot 10^{-3}\ \text{м} = 1\ \text{мм}.$$

Обратите внимание. Нельзя считать, что весь лак даёт слой на «одной стороне» листа: коробочка закрыта со всех шести сторон, лак лежит на всех шести. Поправка на рёбра и углы (лак округлённых рёбер) составляет меньше процента: толщина 1 мм много меньше сторон 20–60 см.

Проверка. Размерность: $\dfrac{\text{кг}}{(\text{кг/м}^3) \cdot \text{м}^2} = \text{м}$. Предел: $m = \sigma S$ даёт $h = 0$ — без лака коробочка весит ровно как картон. Число 1 мм разумно для «толстого» слоя лака.

Смысл: сколько весит добавка к голому картону — столько и лака; а раз лак тонкий, его объём — площадь на толщину.

Ответ. $h = \dfrac{m - 2\sigma(ab + bc + ac)}{2\rho(ab + bc + ac)} \approx 1$ мм.