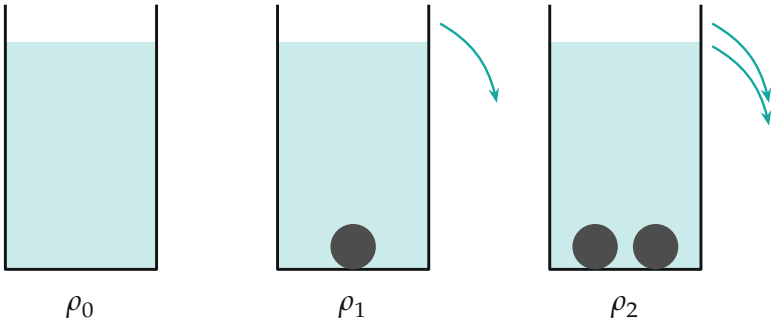
Тонущие шарики в полном стакане

Задача 4. [МОШ 2016-17, 7 класс, задача 4] В стакан, до краев заполненный жидкостью, аккуратно помещают небольшой однородный шарик, который тонет и опускается на дно. В результате средняя плотность содержимого стакана становится равной $\rho_1 = 1200$ кг/м^3. Затем в стакан добавляют еще один такой же шарик, и средняя плотность содержимого становится равной $\rho_2 = 1260$ кг/м^3. Определите плотность ρ_0 жидкости в стакане.



Поясняющий рисунок: стакан без шариков, с одним и с двумя шариками. Бирюзовые стрелки — вытекающая через край жидкость, по объёму равная вытеснившим её шарикам.

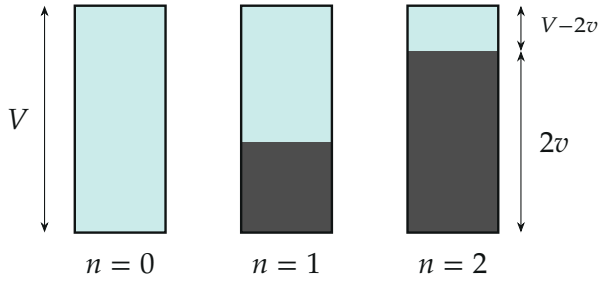
▲ **Решение.** **Что происходит.** Стакан полон, поэтому каждый утонувший шарик вытесняет из стакана ровно свой объём жидкости: она переливается через край. Объём содержимого после этого снова равен объёму стакана, а масса изменилась — на место вылитой жидкости встало вещество шарика. Значит, средняя плотность содержимого растёт с каждым шариком на одну и ту же величину. Это и позволяет найти плотность жидкости, не зная ни плотности, ни объёма шарика.

Обозначения. V — объём стакана; v — объём одного шарика; ρ_s — плотность вещества шарика; n — число шариков в стакане; M_n — масса содержимого стакана с n шариками; $\rho_n = M_n/V$ — средняя плотность (определение: масса содержимого, делённая на его объём).

1. Масса содержимого. Шарики утонули и целиком в стакане, жидкость занимает весь остальной объём:

$$M_n = \rho_0 \, (V - nv) + \rho_s \, nv.$$

Первое слагаемое — масса оставшейся жидкости: вылилась жидкость объёмом nv. Второе — масса шариков.

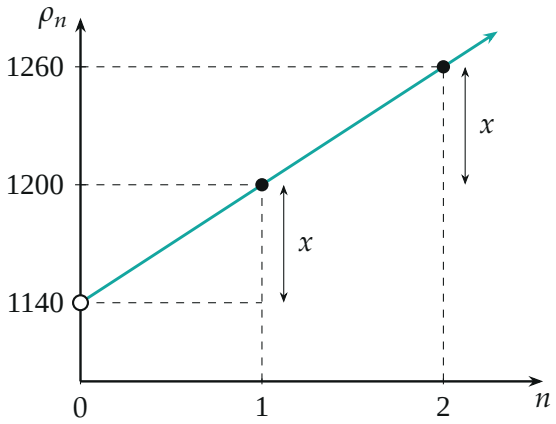


Объём стакана V при $n = 0, 1, 2$ шариках: тёмная часть — шарики (nv), бирюзовая — оставшаяся жидкость ($V - nv$). Масштаб условный: объём шарика на рисунке сильно преувеличен.

2. Средняя плотность. Делим на V:

$$\rho_n = \frac{M_n}{V} = \rho_0 + n\,x, \qquad x = \frac{(\rho_s - \rho_0)\,v}{V}.$$

Величина x одна и та же для любого n: именно поэтому на каждом шаге добавка к плотности одинаковая.



Средняя плотность содержимого стакана ρ_n растёт линейно с числом шариков n (кг/м^3; ось ρ_n начинается со 1100). Белая точка $n = 0$ — чистая жидкость плотности ρ_0.

3. Подставляем данные. Для одного и двух шариков:

$$\rho_1 = \rho_0 + x = 1200, \qquad \rho_2 = \rho_0 + 2x = 1260 \quad \Rightarrow \quad x = \rho_2 - \rho_1 = 60 \text{ кг/м}^3.$$

Тогда $\rho_0 = \rho_1 - x$:

$$\rho_0 = \rho_1 - (\rho_2 - \rho_1) = 2\rho_1 - \rho_2 = 2 \cdot 1200 - 1260 = 1140 \text{ кг/м}^3.$$

Второй способ. Точки $(1;\, 1200)$ и $(2;\, 1260)$ лежат на прямой $\rho_n = \rho_0 + nx$; продолжив её назад до $n = 0$ (график выше), получаем ту же точку 1140: на каждый шаг назад плотность убывает на 60.

Обратите внимание. Нельзя считать, что в стакане остаётся вся жидкость, а шарики просто добавляются: часть жидкости вылилась, поэтому в формуле M_n стоит $V - nv$, а не V. Если забыть про вытеснение, то выйдет совсем другая зависимость и неверный ρ_0.

Проверка. Размерность: все слагаемые — плотности, кг/м^3. Смысл знаков: $\rho_s > \rho_0$ (шарик тонет), значит $x > 0$ и плотность растёт: $1140 < 1200 < 1260$ — верно. Предел $n = 0$: ρ_0 — жидкость без шариков.

Смысл: в полном стакане «шарик в обмен на жидкость» меняет массу на $(\rho_s - \rho_0)v$ каждый раз одинаково — поэтому плотности образуют

арифметическую прогрессию, а ρ_0 — её нулевой член.

Ответ. $\rho_0 = 2\rho_1 - \rho_2 = 1140$ кг/м^3.