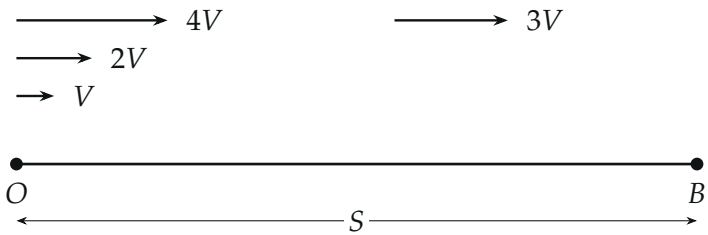
Семья спешит на остановку

Задача 6. [МОШ 2016-17, 7 класс, задача 6] Выйдя из дома, папа с дочкой Машей и сыном Ваней бегут к автобусной остановке, расстояние до которой $S = 430$ м. Скорость Вани равна $V = 2$ м/с, скорость Маши $2V$, а скорость папы $4V$. Если папа сажает любого из детей на шею, то его скорость уменьшается до $3V$. Двоих детей одновременно папа нести не может. Через какое минимальное время вся семья сможет оказаться на остановке? Можно считать, что посадка детей на папину шею, а также разгон и торможение происходят быстро.



Поясняющий рисунок: дорога от дома O до остановки B и скорости участников (длина стрелки пропорциональна скорости): слева сверху вниз папа $4V$, Маша $2V$, Ваня V; справа — папа с ребёнком на шее $3V$.

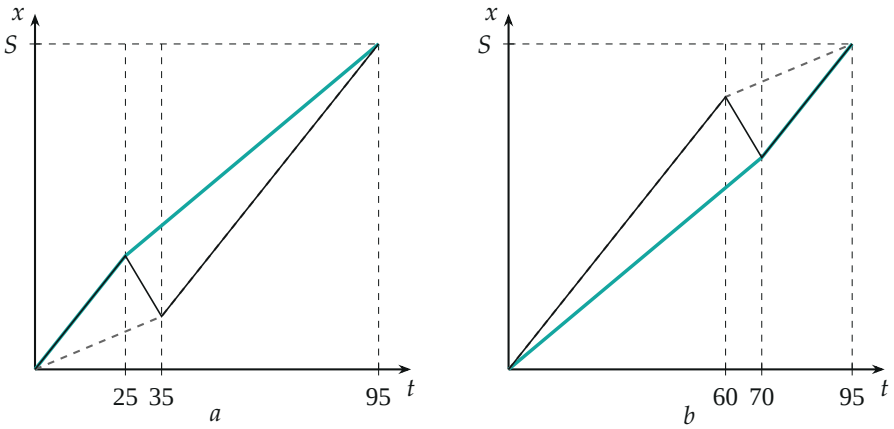
▲ **Решение. Что происходит.** Папа с ребёнком на шее движется быстрее, чем ребёнок сам ($3V$ против $2V$ или V), но медленнее, чем налегке ($4V$). Значит, выгодна «эстафета»: папа везёт одного ребёнка вперёд, высаживает его, бежит налегке назад навстречу второму ребёнку, подхватывает его и везёт до остановки; пока папа возит одного, другой бежит сам. Время семьи — время прихода последнего. Чем дольше папа везёт первого, тем раньше придёт тот, и тем позже — второй: минимум достигается, когда все приходят одновременно.

Обозначения. Ось x — по дороге от дома к остановке. t_1 — время, которое папа везёт первого ребёнка; t_2 — время бега папы назад; T — время прихода семьи (искомое $t_{\min}$). Считаем сначала, что первой папа везёт Машу.

1. Первый этап. За t_1 папа с Машей проходит $3Vt_1$, Ваня — Vt_1. Маша слезает и дальше бежит сама со скоростью $2V$. Расстояние между папой и Ваней: $3Vt_1 - Vt_1 = 2Vt_1$.

2. Папа возвращается. Папа бежит налегке назад со скоростью $4V$, Ваня навстречу вперёд со скоростью V. При встречном движении расстояние между ними сокращается со скоростью, равной сумме модулей скоростей: $4V + V = 5V$. Время встречи и место:

$$t_2 = \frac{2Vt_1}{5V} = 0{,}4\,t_1, \qquad x_* = V\,(t_1 + t_2) = 1{,}4\,Vt_1.$$



Графики координат (м) от времени (с): папа — чёрная ломаная, Маша — бирюзовая, Ваня — серый пунктир. a — первой везут Машу (25 с), b — первым Ваню (60 с); в обоих случаях все приходят в момент 95 *с.*

3. Папа с Ваней. После встречи папа везёт Ваню со скоростью $3V$ оставшиеся $S - 1{,}4Vt_1$:

$$T = 1{,}4\,t_1 + \frac{S - 1{,}4\,Vt_1}{3V} = \frac{S}{3V} + \frac{14}{15}\,t_1.$$

4. Маша. К моменту t_1 она в точке $3Vt_1$, дальше бежит со скоростью $2V$:

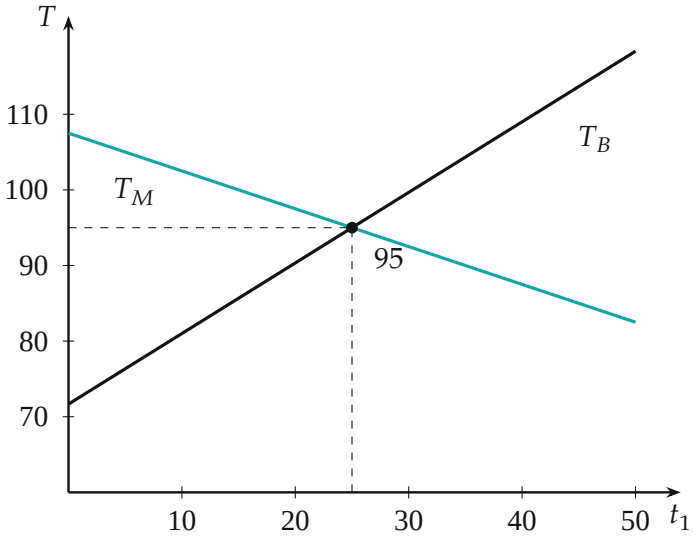
$$T_M = t_1 + \frac{S - 3Vt_1}{2V} = \frac{S}{2V} - \frac{t_1}{2}.$$

5. Все вместе. Приравниваем времена прихода Вани (с папой) и Маши:

$$\frac{S}{2V}-\frac{t_1}{2}=\frac{S}{3V}+\frac{14}{15}t_1 \;\Rightarrow\; \frac{S}{6V}=\frac{43}{30}t_1 \;\Rightarrow\; t_1=\frac{5S}{43V},$$

$$T=\frac{S}{2V}-\frac{t_1}{2}=\frac{S}{2V}-\frac{5S}{86V}=\frac{19\,S}{43\,V}.$$

Численно $t_1=\dfrac{5\cdot 430}{43\cdot 2}=25$ с, $T=\dfrac{19\cdot 430}{43\cdot 2}=95$ с.



Время прихода Маши T_M (убывает по мере роста t_1) и Вани с папой T_B (растёт) в зависимости от времени t_1, которое папа возит Машу ($S=430$ м, $V=2$ м/с; ось T начинается с 60 с). Время семьи — большее из двух; оно минимально там, где линии пересекаются: $t_1=25$ с, $T=95$ с.

6. Очерёдность не важна. Пусть первым папа везёт Ваню. Тогда за t_1 папа проходит $3Vt_1$, Маша — $2Vt_1$, расстояние Vt_1; сближение $4V+2V=6V$: $t_2=t_1/6$, встреча в $x_*=2V\cdot\frac{7}{6}t_1=\frac{7}{3}Vt_1$, и

$$T=\frac{7}{6}t_1+\frac{S-\frac{7}{3}Vt_1}{3V}=\frac{S}{3V}+\frac{7}{18}t_1, \qquad T_B=t_1+\frac{S-3Vt_1}{V}=\frac{S}{V}-2t_1.$$

Приравниваем: $\frac{2S}{3V} = \frac{43}{18}t_1$, $t_1 = \frac{12S}{43V}$ (60 с), $T = \frac{S}{V} - \frac{24S}{43V} = \frac{19S}{43V}$ — то же время, 95 с.

Обратите внимание. Нельзя «просто довезти» одного ребёнка до остановки: если довезти Ваню, Маша добежит сама только за $S/(2V) \approx 108$ с, а если Машу — папе придётся возвращаться за Ваней почти через всю дорогу, и семья придёт примерно за 138 с. Оба варианта заметно хуже 95 с. И нельзя считать скорость сближения при встречном движении разностью: она равна сумме скоростей.

Проверка. Размерность: S/V — метры на (метры в секунду) — секунды. Подсчёт по участкам (порядок «Маша первой»): папа с Машей 25 с $\times 6$ м/с $=$ 150 м; Ваня за это время 50 м; папа бежит назад 10 с ($150 - 8 \cdot 10 = 70$ м) и встречает Ваню в точке 70 м в момент 35 с ($2 \cdot 35 = 70$ — верно); дальше папа с Ваней 360 м за 60 с — итого 95 с; Маша: $150 + 4 \cdot 70 = 430$ м — пришла тогда же.

Смысл: время семьи ограничено самым медленным звеном, а лучший вариант получается, когда никто не ждёт, пока придут остальные.

Ответ. $t_{\min} = \frac{19S}{43V} = 95$ с.