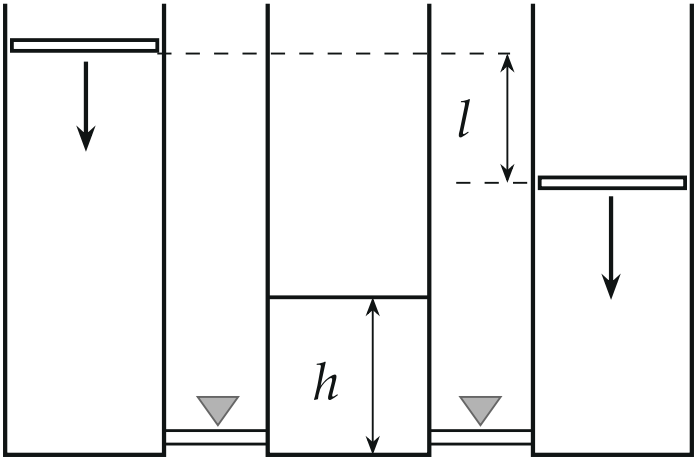
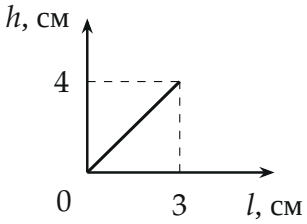
Три сосуда и график уровня

Задача 7. [МОШ 2016-17, 7 класс, задача 7] Три одинаковых вертикальных цилиндрических сосуда сообщаются друг с другом вблизи дна при помощи узких трубок с кранами, которые первоначально перекрыты (см. рисунок слева). В левом и правом сосудах под горизонтальными тонкими поршнями находится вода, а средний сосуд пуст. Краны одновременно открывают, и в тот же момент начинают двигать вниз оба поршня с постоянными скоростями. При этом разница уровней поршней по вертикали увеличивается со скоростью V. Пользуясь графиком зависимости высоты h уровня воды в среднем сосуде от расстояния по вертикали l между поршнями (см. рисунок справа), найдите скорость каждого из поршней.





Рисунки к условию: слева — сосуды, справа — график зависимости $h(l)$.

▲ **Решение. Что происходит.** Воде деваться некуда: она несжимаема и никуда не вытекает. Каждый опускающийся поршень выдавливает под собой воду, и она через трубку уходит в средний сосуд. Поэтому уровень h в среднем сосуде растёт тем быстрее, чем больше сумма скоростей поршней, а расстояние l между поршнями — как их разность. Обе величины растут со временем линейно, так что их отношение h/l не меняется: график — прямая из начала координат, и по нему можно найти отношение суммы скоростей к разности.

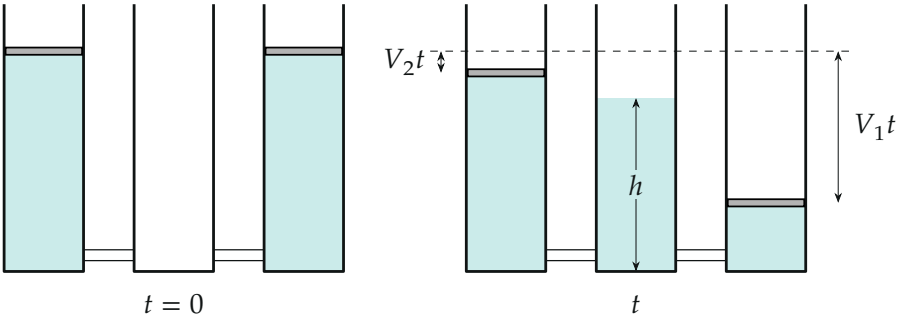
Обозначения. S — площадь сечения каждого из трёх одинаковых сосудов; V_1 — скорость нижнего (быстро движущегося) поршня, V_2 — верхнего; t — время от момента открытия кранов; h — высота воды в среднем сосуде; l — расстояние по вертикали между поршнями.

1. Начальное положение поршней. В момент $t = 0$ средний сосуд пуст, $h = 0$, и график показывает, что тогда же $l = 0$: поршни стартуют с одного уровня. Дальше расстояние растёт, значит, нижним оказывается тот поршень, который движется быстрее; на рисунке к условию это правый ($V_1 > V_2$).

2. Разность скоростей. За время t нижний поршень опустится на $V_1 t$, верхний на $V_2 t$, поэтому

$$l = V_1 t - V_2 t = (V_1 - V_2)\, t.$$

По условию l растёт со скоростью V: $V_1 - V_2 = V$.



Сосуды в момент $t = 0$ (слева) и спустя время t (справа). Вода, которую

выдавили поршни, оказалась в среднем сосуде. Пунктир — начальный уровень поршней.

3. Сохранение объёма воды. Вода несжимаема, из системы не уходит, воду в узких трубках не учитываем. Левый поршень освободил объём SV_2t, правый — SV_1t, вся эта вода собралась в среднем сосуде:

$$Sh = SV_1t + SV_2t \quad \Rightarrow \quad h = (V_1 + V_2)\,t.$$

4. Отношение h/l. Делим третий пункт на второй:

$$\frac{h}{l} = \frac{V_1 + V_2}{V_1 - V_2} = \frac{V_1 + V_2}{V}.$$

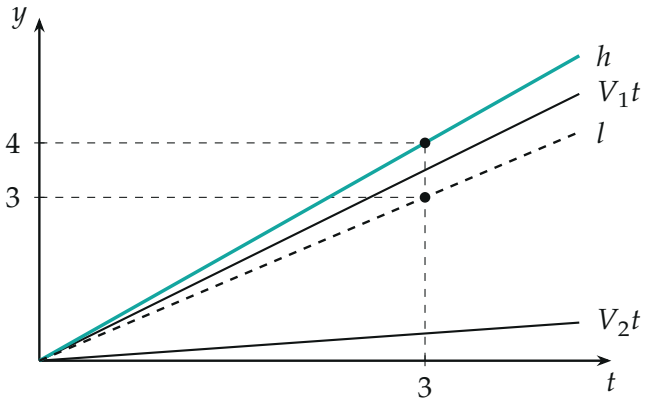
Время сократилось: отношение постоянно, поэтому график — прямая через начало координат, и оно берётся из любой её точки. По рисунку точка (3 см; 4 см): $h/l = 4/3$, откуда

$$V_1 + V_2 = \frac{4}{3}\,V.$$

5. Скорости поршней. Два уравнения: $V_1 - V_2 = V$, $V_1 + V_2 = \frac{4}{3}V$. Складываем: $2V_1 = \frac{7}{3}V$, вычитаем: $2V_2 = \frac{1}{3}V$:

$$V_1 = \frac{7}{6}\,V, \qquad V_2 = \frac{1}{6}\,V.$$

Быстрый поршень — нижний (на рисунке правый), медленный — верхний (левый).



Как меняются со временем V_1t (опускание нижнего поршня), V_2t (верхнего), $l = V_1t - V_2t$ и $h = V_1t + V_2t$ при $V = 1$ см за единицу времени. Все четыре прямые выходят из начала; в момент $t = 3$ получаем $l = 3$ и $h = 4$, как на графике условия.

Обратите внимание. V — не скорость какого-то из поршней, а скорость, с которой растёт *разность* их уровней. А график — прямая именно потому, что обе величины пропорциональны времени; без этого одной точки $(3; 4)$ не хватило бы.

Проверка. Разность $V_1 - V_2 = \frac{7}{6}V - \frac{1}{6}V = V$ — верно; отношение $(V_1 + V_2)/V = (8/6)V/V = 4/3$ — как на графике. Предел: $h/l \geq 1$ при любых скоростях (сумма не меньше разности), и $h/l = 1$ только когда верхний поршень стоит ($V_2 = 0$); здесь $4/3 > 1$, значит, верхний поршень тоже движется.

Ответ. $V_1 = \dfrac{7}{6}V$ (нижний поршень) и $V_2 = \dfrac{1}{6}V$ (верхний поршень).