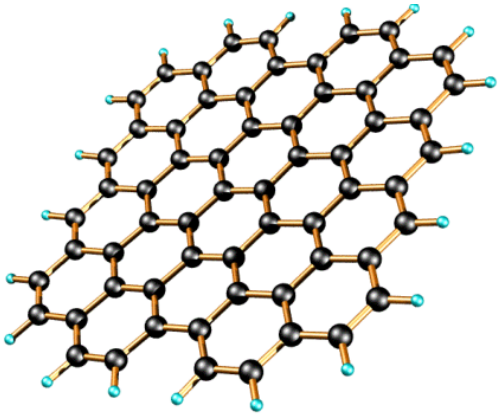
Пластилиновая модель графена

Задача 8. [МОШ 2016-17, 7 класс, задача 8] Чебурашка и Гена долго строили и, наконец, построили наглядную модель графена – двумерного кристалла углерода, состоящего из ячеек в виде правильных шестиугольников, как показано на рисунке в масштабе 250.000.000 : 1.



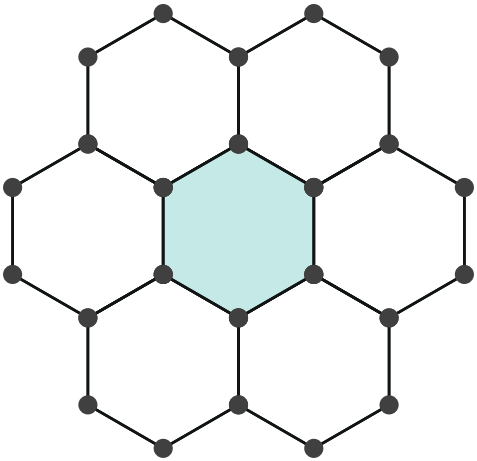
Количество ячеек в модели было большим, так что её площадь оказалась равной 12,5 м^2. Атомы углерода в модели – одинаковые пластилиновые шарики, а «связи» между «атомами» – кусочки проволоки, сделанной из медного сплава. При этом объем пластилина в каждом шарике в 9 раз больше объема каждой проволочки, соединяющей соседние шарики.

Оцените массу этой модели графена. Плотность пластилина $\rho_{\text{плас}} = 1330$ кг/м^3, плотность медного сплава $\rho_{\text{пров}} = 9000$ кг/м^3. Масса проволочек, необходимых для изготовления одной-единственной ячейки графена, составляет 487 мг. Расстояние между центрами соседних атомов настоящего графена 0,142 нм (нанометр – это одна миллионная часть миллиметра). Площадь S правильного шестиугольника с длиной стороны a определяется по формуле: $S = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}a^2$, где $\sqrt{3} \approx 1{,}7$.

▲ **Решение. Что происходит.** Модель — увеличенная копия кристалла: в вершинах шестиугольников шарики, вдоль сторон проволочки. Масса

модели — это число ячеек, умноженное на массу, приходящуюся на одну ячейку. Число ячеек даёт площадь: площадь всей модели делим на площадь одной ячейки. Масса на ячейку — два шарика и три проволочки: каждая вершина общая для трёх ячеек, каждая сторона — для двух. Модель большая, ячеек тысячи, поэтому краями (где ячейки неполные) пренебрегаем: это оценка.

Обозначения. $k = 2{,}5 \cdot 10^8$ — во сколько раз модель больше кристалла; $a_0 = 0{,}142$ нм — расстояние между соседними атомами; a — сторона ячейки модели; S_0 — площадь одной ячейки модели; $S = 12{,}5$ м^2 — площадь модели; N — число ячеек; m_w — масса одной проволочки, m_p — масса одного шарика; $m_я$ — масса, приходящаяся на ячейку; M — масса модели; $\rho_p = 1330$ кг/м^3, $\rho_w = 9000$ кг/м^3.



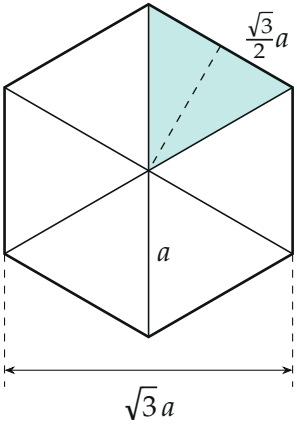
Фрагмент решётки: центральная ячейка (бирюзовая) окружена шестью соседними. Каждый из шести шариков центральной ячейки одновременно принадлежит ещё двум соседним ячейкам — на ячейку приходится $6/3 = 2$ шарика; каждая из шести проволочек общая с одной соседней ячейкой — приходится $6/2 = 3$ проволочки.

1. Сторона ячейки модели. Проволочка соединяет центры соседних шариков, поэтому сторона шестиугольника равна расстоянию между соседними атомами. В модели оно в k раз больше:

$$a = k\,a_0 = 2{,}5 \cdot 10^8 \cdot 0{,}142 \cdot 10^{-9}\ \text{м} = 3{,}55 \cdot 10^{-2}\ \text{м} = 3{,}55\ \text{см}.$$

2. Площадь ячейки. По формуле из условия, с $\sqrt{3} \approx 1{,}7$:

$$S_0 = \frac{3\sqrt{3}}{2} a^2 \approx 2{,}55 \cdot (3{,}55 \cdot 10^{-2}\ \text{м})^2 \approx 3{,}2 \cdot 10^{-3}\ \text{м}^2\ (\approx 32\ \text{см}^2).$$



Ячейка — шесть равносторонних треугольников со стороной a; площадь каждого $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$, всего $\frac{3\sqrt{3}}{2}a^2$. Расстояние между противоположными сторонами — $\sqrt{3}\,a$.

3. Число ячеек. Модель целиком состоит из ячеек:

$$N = \frac{S}{S_0} = \frac{12{,}5}{3{,}2 \cdot 10^{-3}} \approx 3{,}9 \cdot 10^3.$$

4. Масса проволочки и шарика. Масса проволочек одной ячейки — 487 мг — это масса шести сторон одной ячейки, а не доли, которая ей «принадлежит». Поэтому

$$m_w = \frac{487\ \text{мг}}{6} \approx 81\ \text{мг}.$$

Объём проволочки $v_w = m_w/\rho_w$; объём шарика $9v_w$, так что масса ша-

рика

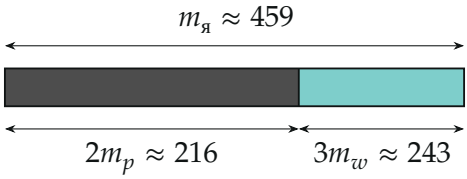
$$m_p = \rho_p \cdot 9v_w = 9\,\frac{\rho_p}{\rho_w}\,m_w = 9 \cdot \frac{1330}{9000} \cdot 81 \text{ мг} \approx 108 \text{ мг}.$$

5. Масса на одну ячейку. Два шарика и три проволочки (рисунок выше):

$$m_я = 2m_p + 3m_w \approx 2 \cdot 108 + 3 \cdot 81 \text{ мг} \approx 4{,}6 \cdot 10^2 \text{ мг} = 0{,}46 \text{ г}.$$

6. Масса модели.

$$M = N\,m_я \approx 3{,}9 \cdot 10^3 \cdot 0{,}46 \text{ г} \approx 1{,}8 \cdot 10^3 \text{ г} \approx 1{,}8 \text{ кг}.$$



Масса, приходящаяся на одну ячейку (мг): тёмная часть — два шарика, бирюзовая — три проволочки.

Обратите внимание. 487 мг относится ко всем шести проволочкам вокруг одной ячейки, а на саму ячейку приходится лишь три — это легко перепутать, и ответ получится вдвое неверным. По той же причине на ячейку приходится два шарика, а не шесть.

Проверка. Второй способ: поверхностная плотность модели $m_я/S_0 = 0{,}46$ г/32 см$^2 \approx 0{,}14$ кг/м^2, умножаем на площадь: 0,14·12,5 ≈ 1,8 кг — то же. Размерность: N безразмерно, $m_я$ — масса; порядок величины разумен: около 0,14 кг на квадратный метр — как плотная бумага.

Ответ. Масса модели графена $M \approx 1{,}8$ кг.