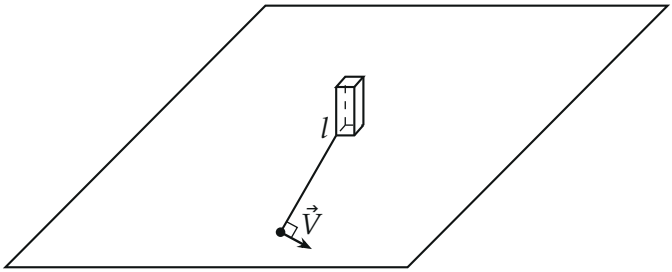
Шарик на нити у столбика

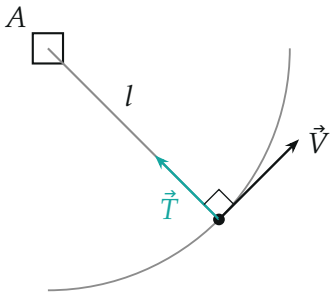
Задача 1. [МОШ 2016/17, 8 класс, задача 1] На гладкой горизонтальной поверхности закреплен вертикальный столбик, представляющий собой призму с квадратным сечением, причем сторона квадрата равна $a = 10$ см (см. рис.). К столбику на лёгкой нерастяжимой нити длиной $l = 1{,}05$ м привязан маленький шарик. Нить горизонтальна, а шарик покоится на поверхности. Шарику сообщают скорость $V = 50$ см/с, направленную вдоль поверхности перпендикулярно нити и одной из граней столбика. Спустя некоторое время после этого вся нить наматывается на столбик. Найдите, какой путь пройдет шарик до удара о столбик, и за какое время нить полностью намотается на него? Длина окружности радиусом R равна $l = 2\pi R$, где $\pi = 3{,}14$.



▲ **Решение. Что происходит.** На шарик по горизонтали действует только натяжение нити, а оно направлено вдоль нити, то есть перпендикулярно скорости. Такая сила скорость не разгоняет и не тормозит, только поворачивает: модуль скорости остаётся равным V. Шарик идёт по дугам окружностей; цепляясь за рёбра столбика, нить каждый раз укорачивается на сторону квадрата, и радиус дуги уменьшается ровно на a. Класс задачи: равномерное движение по траектории из дуг, путь равен сумме длин дуг.

Обозначения. R_k — радиус k-й дуги ($k = 0, 1, 2, \ldots$), S — путь шарика, t — время. Столбик в плане — квадрат $ABCD$ со стороной a, нить привязана к ребру A (в плане — к вершине квадрата) и в начале перпендикулярна грани AB.

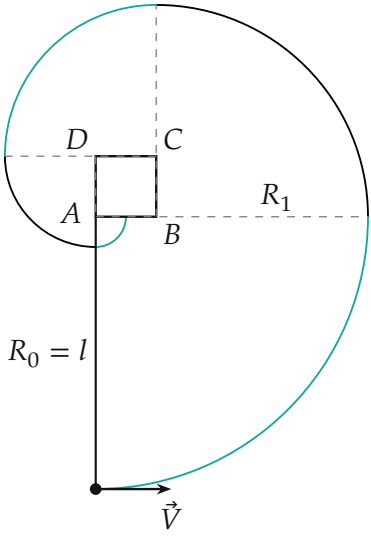
1. Скорость не меняется. Смотрим сверху: вертикальные силы (сила тяжести и реакция поверхности) скорость вдоль поверхности не меняют; трения на гладкой поверхности нет; остаётся сила натяжения $\vec{T}$ вдоль нити.



Вид сверху: нить натянута вдоль радиуса, сила $\vec{T}$ направлена к вершине A и перпендикулярна скорости $\vec{V}$.

Работа силы $\vec{T}$ на малом перемещении равна нулю, так как $\vec{T} \perp \vec{V}$. По теореме о кинетической энергии кинетическая энергия шарика не меняется, значит, модуль скорости всё время равен V. Поэтому путь и время связаны просто: $S = Vt$.

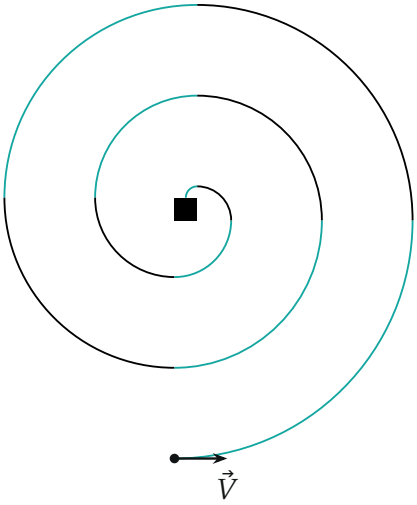
2. Траектория. Пока свободный участок нити длиной R тянется от ребра A и не касается других рёбер, шарик движется по окружности радиусом $R_0 = l$ вокруг A. Нить поворачивается, пока не ляжет на грань AB, то есть на 90°, и упрётся в ребро B. Дальше свободна только часть нити длиной $l - a$, и шарик идёт по дуге радиусом $R_1 = l - a$ вокруг ребра B, пока нить не ляжет на грань BC — ещё 90°, и так далее. В момент перехода нить лежит вдоль грани, скорость перпендикулярна ей, поэтому направление скорости не скачет: дуги плавно переходят одна в другую, никакого удара нет.



Первые дуги (для наглядности $l = 4{,}5a$): центры — вершины A, B, C, D, A, …; радиусы l, $l - a$, $l - 2a$, … Пунктир — положения нити в моменты перехода.

3. Радиусы и число дуг. Радиус k-й дуги $R_k = l - ka$. Здесь $l/a = 105/10 = 10{,}5$, то есть $l = 10a + a/2$. После десятой смены остаётся свободным участок $R_{10} = l - 10a = a/2 = 5$ см: это последняя дуга — четверть окружности радиусом $a/2$ вокруг ребра C, после неё остаток нити лёг на половину грани CD, и шарик ударяется о столбик. Всего дуг $n = 11$, радиусы

$$R_k = l,\ l - a,\ l - 2a,\ \ldots,\ \frac{a}{2} \qquad (105,\ 95,\ 85,\ \ldots,\ 5 \text{ см}).$$



Вся траектория для $l = 10{,}5\,a$: 11 четвертей окружностей, радиусы убывают на a (чёрный квадрат — столбик).

4. Путь. Каждая дуга — четверть окружности: её длина $\dfrac{2\pi R_k}{4} = \dfrac{\pi}{2} R_k$. Путь — сумма длин:

$$S = \frac{\pi}{2}\left(l + (l-a) + (l-2a) + \dots + \frac{a}{2}\right).$$

В скобке стоит арифметическая прогрессия из $n = 11$ членов; сумма равна числу членов, умноженному на полусумму первого и последнего:

$$\sum R_k = n\,\frac{l + a/2}{2}, \qquad n = \frac{l + a/2}{a} \quad \Rightarrow \quad S = \frac{\pi}{4a}\left(l + \frac{a}{2}\right)^2.$$

Числа: $S = \dfrac{3{,}14 \cdot (1{,}10\ \text{м})^2}{4 \cdot 0{,}10\ \text{м}} \approx 9{,}5$ м. Поэтапно: $\sum R_k = 11 \cdot \dfrac{1{,}05 + 0{,}05}{2} = 6{,}05$ м, $S = 1{,}57 \cdot 6{,}05 \approx 9{,}5$ м. Для этих чисел то же выражение записывается как $S = \dfrac{\pi}{2}\left(6l - \dfrac{5a}{2}\right) : 6 \cdot 1{,}05 - 0{,}25 = 6{,}05$.

5. Время. Скорость постоянна, поэтому

$$t = \frac{S}{V} = \frac{9{,}5\text{ м}}{0{,}5\text{ м/с}} \approx 19\text{ с}.$$

Обратите внимание. Радиус уменьшается на a, а не на $a/2$: нить привязана к ребру, и каждый раз на ребре «исчезает» целая грань. Спрашивают путь по траектории (длину всех дуг), а не перемещение шарика. Последняя дуга радиусом $a/2$ тоже полная четверть окружности.

Проверка. Размерность: $[\pi(l + a/2)^2/a] =$ м. Грубо: средний радиус дуг около 0,55 м, одиннадцать четвертей окружности дают $11 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot 0{,}55 \approx 9{,}5$ м — совпало. Предел $a \to 0$: $S \to \infty$ (шарик бесконечно долго навивается на тонкий столбик), что естественно: чем тоньше столбик, тем медленнее убывает радиус.

Ответ. Путь $S = \frac{\pi}{2}\left(6l - \frac{5a}{2}\right) \approx 9{,}5$ м; нить намотается за $t = S/V \approx 19$ с.